目　　录

第一章 集合代数

1.0. 集　　合

由事物组成的集体，无论它们是由它们的成员直接表示出来的，还是由它们的成员所具有的某些本质属性表示出来的，都称为**集合**．在某一特定时刻，某一特定房间里的学生构成一个集合，某城市的选民册上的所有选民构成一个集合（如同在名册上他们的名字构成一个集合一样），一个人的头发、他体内的血球、他出生以来以秒计算的时间，所有这些都构成集合．如果集合是由共同的成员所组成的，我们将称它们为相等集合。

1.1. 从属关系

我们将用大写字母作为集合的名称． 若某事物 a 是集合 A 的一个成员，则我们将记为

$$a \in A,$$

并说“a 属于 A”，或说“a 在 A 中”． 这样，“地球 ∈ 行星”就表示我们地球与行星集合的关系．

若 a 不是集合 A 的成员，则记作

$$a \notin A.$$

若能写出一个集合的所有成员的记号，则我们用一个括号把这些记号括起来以表示这个集合． 因此 $\{1, 2, 3\}$ 就表

示包含数 1，2 和 3（此外不再包含其他东西）的集合，例如 $\{2, 1, 3\}$，$\{3, 1, 2\}$，$\{1, 1, 2, 3\}$ 等均表示同一集合，而 $\{a, b, c, d\}$ 则表示包含前四个英文字母的集合．我们用这种方法可以表出任何相当小的集合，但这种记号对于大的集合（例如由 1 到 10^{10} 的所有的数的集合）显然是不适用的，至于对于具有无穷多个成员的集合（例如全部整数的集合）则无意义．

必须将以某个对象 A 为其仅有的一个成员的集合，即集合 $\{A\}$，与 A 本身区别开来．举例来说，若 $A=\{1, 2\}$，则 $\{A\}$ 是一个仅有一个成员的集合，但 A 却是一个具有两个成员的集合．仅有一个成员的集合称为单位集合．

1.2. 包含关系

若集合 A 的每一成员也是集合 B 的一个成员，则我们说集合 A 被包含于集合 B 中，且记为

$$A \subset B.$$

区别从属关系"$\in$"及包含关系"$\subset$"是重要的．从属关系是集合的成员与集合本身的关系；在从属关系的一边（左边）写有集合的一个成员，而在另一边（右边）则写着一个集合．但包含关系却是集合之间的关系，它的每一边都是集合．若 $A \subset B$，则我们称 A 是 B 的**子集合**，而 B 是 A 的**母集合**．每个集合均包含于它自身之中，即 $A \subset A$，这是因为 A 的成员（左边的）必然是同一集合 A（右边的）的成员．集合 A 的任一异于 A 本身的子集合称为**真子集合**．若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则 $A=B$，这是因为 A 的每个成员都是 B 的成员、而 B 的每个成员也都是 A 的成员，因此 A 与 B 有相同的成员．

1.3. 空集合与全集合

一种方便的虚构是**空集合**或**零集合**，即没有成员的集合。如果在某次测验中没有人参加测验，那末参加测验的人的集合就是空集合。我们用 0 表示空集合；因此关系 $x \in 0$ 对于世界上任何事物 x 来说都是假的。另外一个方便的虚构是**全集合**，即一切事物(或所考虑到的一切事物)所构成的集合，我们用 1 表示它。空集合与全集合都是唯一的。空集合常被看做每个集合的子集合（因为世界上没有一个事物是 0 的成员而又不是任意 A 的成员的）。任何一个集合当然是全集合的子集合。特别地，$0 \subset 1$。

1.4. 集合的补

如果我们从全集合中取出某集合 A 的所有成员，则剩余的事物构成 A 的**补集合**，用 A' 表示。集合 A 与 A' 没有公共的成员，但全集合的每个成员不是 A 的一个成员就是 A' 的一个成员。空集合的补集合是全集合，反之，全集合的补集合是空集合。即

$$0' = 1, \quad 1' = 0.$$

相补关系是**对合**(involutory)的，这就是说，补集合的补集合是原集合。

1.5. 并与交

给定两个集合 A，B 后，我们可以构成被称为 A 与 B 的**并**的集合 C，使它的成员是 A 的成员或是 B 的成员；若 A 与 B 有

公共成员，则这些公共成员在并中只出现一次．例如，A 和 B 是两袋马铃薯，那末它们的并就是把这两袋全部倒进第三袋所构成的．两个集合 A 与 B 的并可表成

$$A \cup B.$$

由定义，并是可交换的，即

$$A \cup B = B \cup A.$$

例

1. 若 $A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{c, d, e, f\}$，则

$$A \cup B=\{a, b, c, d, e, f\}.$$

2. 若 A 是偶数集合，而 B 是奇数集合，则 $A \cup B$ 是所有整数的集合．

3. 若 A 是猫的集合，而 B 是波斯猫的集合，则 $A \cup B=A$，因为每个波斯猫都是猫．

4. 若 A 是猫的集合，而 B 是尾长 5 呎的猫的集合，则 $A \cup B = A$；这是因为 B 是空集合，它对于并不能提供任何东西．

对于任何集合 A，

$$A \cup 0 = A,\quad A \cup 1 = 1,\quad A \cup A = A.$$

因为 $A \cup 0$ 的成员不是 A 的成员，就是 0 的成员，而 0 是没有成员的．又 $A \cup 1$ 的成员包含 1 的成员，因此它包含所有的事物．最后，$A \cup A$ 的成员恰是 A 的成员．关系 $A \cup A = A$ 称为并的**等幂律**．因为每个事物或属于 A 或属于 A'，所以有

$$A \cup A' = 1.$$

两个集合的公共成员所构成的集合称为它们的**交**，A, B 的交表为

$$A \cap B.$$

根据定义，交是可交换的，即 $A \cap B = B \cap A$．

例

1. 若 $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{c, d, e\}$, 则

$$A \cap B=\{c, d\}.$$

2. 若 A 是绿眼猫的集合, B 是长毛猫的集合, 则 $A \cap B$ 是长毛绿眼猫的集合.

3. 若 A 是猫的集合, 而 B 是狗的集合, 则 $A \cap B$ 是空集合, 因为没有一种动物既是猫又是狗.

对于任何集合 A

$$A \cap 1=A, \quad A \cap 0=0, \quad A \cap A=A.$$

因为 A 的每个成员都是 A 与全集合所公有的, 而空集合同 A 没有公共的成员(即使 A 本身是空集合时也如此). 第三个关系(交的等幂律)只是说, A 的每个成员是 A 和它本身所公有的. 因为 A 与 A' 没有公共成员, 我们还有

$$A \cap A'=0.$$

1.6. 相补、包含、并及交的关系

我们在相补、包含、并及交之间着手建立一些重要的关系.

1.61. 我们首先证明, 对于任何集合 A, B,

$$A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B,$$

$$A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B.$$

这是因为 A 和 B 的公共成员(如果存在的话)都是 A 的成员, 也都是 B 的成员; 并 $A \cup B$ 既包含 A 的成员也包含 B 的成员.

1.62. 下面三个关系

(i) $A \subset B$, (ii) $A \cup B=B$, (iii) $A \cap B=A$,

是**等价的**, 这就是说, 如果它们中间的任何一个成立, 则它们三个都成立.

设 (i) 成立，则 $A \cup B$ 的每个成员或是 B 的一个成员，或是 A 的一个成员，在后一情形由 (i) 它还是 B 的成员，这就是说 $A \cup B \subset B$；但因 $B \subset A \cup B$，所以 (ii) 成立；此外，A 的每个成员也是 A, B 的公共成员，因此 $A \subset A \cap B$，又因 $A \cap B \subset A$，因此 (iii) 成立. 请注意我们证明一个等式时所使用的方法：为了证明，比如说，$X = Y$，我们就同时证明 $X \subset Y$ 及 $Y \subset X$，换句话说，左边集合的每个成员都是右边集合的一个成员，而右边集合的每个成员也都是左边集合的一个成员.

其次，假设 (ii) 成立，因为 $A \subset A \cup B$ 及 $A \cup B = B$，所以 (i) 成立，从而 (iii) 成立.

最后，我们假设 (iii) 成立，则由 $A \cap B \subset B$ 有 (i)，因而有 (ii). 证毕.

1.63. 德·摩根 (De Morgan) 律 并与交取补后互换.

精确地说是：

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

这些关系称为德·摩根律. 因为这两个式子中的任何一个是另一个在相补关系下的直接结果，所以证明其中的任意一个就够了. 我们记得补集合的补集合是原集合这一事实，那末由第一个关系 (注意 A, B 已换成 A', B') 我们有

$$(A' \cup B')' = A'' \cap B'',$$

即

$$(A' \cup B')' = A \cap B.$$

再在两边取补(因为若两个集合相等，那末它们的补集合也相等)，得

$$(A' \cup B')'' = (A \cap B)'$$

即

$$(A \cap B)' = A' \cup B',$$

这恰是我们所需要的.

现在我们来证明第一个关系.

若 $c \in (A \cup B)'$, 则 $c \notin A \cup B$, 因此 $c \notin A$ 且 $c \notin B$, 换句话说, $c \in A'$ 且 $c \in B'$, 因此 $c \in (A' \cap B')$, 这就证明了

$$(A \cup B)' \subset (A' \cap B'). \tag{1}$$

反之,如果 $c \in A' \cap B'$, 则 $c \in A'$ 且 $c \in B'$, 这就是说 $c \notin A$ 且 $c \notin B$, 因此 $c \notin A \cup B$, 这是因为并的所有成员是 A 的成员或是 B 的成员. 但是若 $c \notin A \cup B$, 则 $c \in (A \cup B)'$, 这就证明了

$$A' \cap B' \subset (A \cup B)'. \tag{2}$$

由包含关系 (1), (2), 我们得到所要证明的等式

$$(A \cup B)' = A' \cap B'.$$

1.7. 结 合 律

并和交都是可结合的,即

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

为了证明并的结合律,只须注意 $A \cup (B \cup C)$ 是由属于 A 或属于 B 或属于 C 的事物所构成的集合,而 $(A \cup B) \cup C$ 也是这同一集合. 交的结合律可由并的结合律及利用德·摩根律而得到, 但是比较简单的还是去观察 $A \cap (B \cap C)$, 它是由 A, B 及 C 的公共成员所构成的集合,因此它和 $(A \cap B) \cap C$ 是同一集合.

根据结合律, 我们可将 $(A \cup B) \cup C$ 及 $A \cup (B \cup C)$ 中的任一个写为 $A \cup B \cup C$, 并将 $(A \cap B) \cap C$ 及 $A \cap (B \cap C)$ 中的任一个写为 $A \cap B \cap C$. 这种任意省略括号的做法还可推广到任何多个集合的情形上去,例如

$$(A \cup B \cup C) \cup D = (A \cup B) \cup (C \cup D) = A \cup (B \cup C \cup D)$$

这是因为这些集合中的每一个集合的成员都是 A, B, C, D 的成员,除此以外无其它情况,因此我们可将这些集合中的任一个写为 $A \cup B \cup C \cup D$. 由于并(以及交)又是可交换的,因此可以任意调换

$$A \cup B \cup C$$

中集合的次序. 例如

$$\begin{aligned} C \cup B \cup A &= (C \cup B) \cup A = A \cup (C \cup B) \quad (\text{由交换律}) \\ &= A \cup (B \cup C) \quad (\text{同上}) \\ &= A \cup B \cup C. \end{aligned}$$

这个结果显然可以推广到任意多个集合的情形上去, 举例来说,

$$\begin{aligned} B \cup D \cup A \cup C &= (B \cup D \cup A) \cup C \\ &= (A \cup B \cup D) \cup C \\ &= (A \cup B) \cup (D \cup C) \\ &= (A \cup B) \cup (C \cup D) \\ &= A \cup B \cup C \cup D, \end{aligned}$$

这是很明显的,因为无论 $B \cup D \cup A \cup C$ 或 $A \cup B \cup C \cup D$ 都是由而且仅由 A, B, C, D 的成员所构成的集合.

1.8. 分 配 律

并与交中的每一个关于另一个都是可分配的,即

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

及

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

这些关系式使我们联想到普通算术中的分配律

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

但是普通算术中仅有一个分配律 $[(a \cdot b)+c$ 一般不等于 $(a+c)\cdot(b+c)]$. 为了证明并关于交是可分配的，我们注意，若 $x \in A \cup (B \cap C)$，则 x 或属于 A，或属于 $B \cap C$；若是前一情形，则 $x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$，因而 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$；若是后一情形，则 $x \in B$ 且 $x \in C$，因此 $x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$，因此仍有 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$，这就证明了

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C). \qquad (1)$$

反之，若 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$，则 $x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$；若 $x \notin A$，则必须 $x \in B$ 且 $x \in C$，因此 $x \in B \cap C$，而最后就有 $x \in A \cup (B \cap C)$；若 $x \in A$，则 $x \in A \cup (B \cap C)$ 仍为真确，这就证明了

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C). \qquad (2)$$

由 (1)、(2) 即得第一个分配律.

第二个分配律可用同样的方法证明，也可以用在第一个分配律上取补的方法导出.

1.81. 下列一对关系

$$A \cup B = 1, \quad A \cap B = 0$$

成立的充要条件是 $B = A'$. 我们已经指出过 $A \cup A' = 1$，$A \cap A' = 0$，因此只需证明仅有 A' 具有这个性质就行了.

由 $A \cup B = 1$ 有

$$A' \cap (A \cup B) = A' \cap 1 = A',$$

但由分配律

$$\begin{aligned} A' &= (A' \cap A) \cup (A' \cap B) \\ &= 0 \cup (A' \cap B) \\ &= A' \cap B, \end{aligned}$$

而由 1.62 有 $A' \subset B$.

由 $A \cap B = 0$，我们有

$$A' \cup (A \cap B) = A' \cup 0 = A',$$

因此

$$(A' \cup A) \cap (A' \cup B) = A',$$

这就是说

$$1 \cap (A' \cup B) = A'$$

因此

$$A' \cup B = A',$$

由 1.62 有

$$B \subset A'.$$

这样从两个关系式

$$A \cup B = 1, \quad A \cap B = 0,$$

我们就可得到

$$B \subset A', \quad A' \subset B,$$

即

$$B = A'.$$

1.82. 对于任意的集合 A, B, C, (i) 若 $A \subset B$ 且 $A \subset C$, 则 $A \subset B \cap C$; (ii) 若 $A \subset C$, $B \subset C$, 则 $A \cup B \subset C$.

因为如果 (i) $A \subset B$ 且 $A \subset C$, 则 $A \cap B = A$, $A \cap C = A$, 因而有

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap C = A,$$

因此 $A \subset B \cap C$. 又若 (ii) $A \subset C$ 且 $B \subset C$, 则 $A \cup C = C$, $B \cup C = C$, 因此

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup C = C,$$

这就证明了 $A \cup B \subset C$.

1.83. 若 $A \subset B$, 则

$$A \cap C \subset B \cap C,$$

且

$$A \cup C \subset B \cup C.$$

这是因为由 $A=A\cap B$ 有 $A\cap C=(A\cap B)\cap C$，因而

$$
\begin{aligned}
(A\cap C)\cap(B\cap C) &= A\cap(B\cap C)\cap(B\cap C)\\
&= A\cap B\cap C\\
&= A\cap C,
\end{aligned}
$$

这就证明了 $A\cap C\subset B\cap C$；

又因 $A\cup B=B$，我们有

$$
\begin{aligned}
(A\cup C)\cup(B\cup C) &= (A\cup B)\cup(C\cup C)\\
&= (A\cup B)\cup C = B\cup C,
\end{aligned}
$$

这就证明了 $A\cup C\subset B\cup C$.

这些结果的一个推论是：如果 $A=B$，则 $A\cap C=B\cap C$ 及 $A\cup C=B\cup C$. 这是因为：如果 $A=B$ 则 $A\subset B$ 且 $B\subset A$.

1.84. 从 1.61 及 1.83 有

$$A\cap(A\cup B)=A.$$

这是因为由 1.61 有 $A\cap(A\cup B)\subset A$ 和 $A\subset A\cup B$，因此 $A=A\cap A\subset A\cap(A\cup B)$.

1.85. $A\subset B$ 的充要条件是 $A\cap B'=0$.

因为若 $A\subset B$，则 $A=A\cap B$，从而有

$$
\begin{aligned}
A\cap B' &= (A\cap B)\cap B' = A\cap(B\cap B')\\
&= A\cap 0 = 0;
\end{aligned}
$$

反之，若 $A\cap B'=0$，则

$$
\begin{aligned}
A = A\cap 1 &= A\cap(B\cup B') = (A\cap B)\cup(A\cap B')\\
&= (A\cap B)\cup 0 = A\cap B.
\end{aligned}
$$

1.86. 若对于所有的集合 A 都有 $B\subset A$，则 $B=0$.

因为特别有 $B\subset 0$，但是 $0\subset B$，所以 $B=0$.

若对于所有的集合 A 都有 $A\subset B$，则 $B=1$.

因为特别有 $1\subset B$，同时还有 $B\subset 1$，所以 $B=1$.

1.87. 若 $A \cup B = 0$, 则 $A = 0$ 且 $B = 0$.

因为 $A \subset A \cup B = 0$, 因此 $A = 0$; 类似地有 $B = 0$.

1.88. 若 $A \cap B = 1$, 则 $A = 1$ 且 $B = 1$.

因为 $1 = A \cap B \subset A$, 因此 $A = 1$; 类似地有 $B = 1$.

1.9. 集合的差与对称差

两个集合 A, B 的**差** $A - B$ 被定义为一切属于 A 但不属于 B 的元素所组成的集合,即

$$A - B = A \cap B'.$$

我们研究集合差的一些性质. 我们首先注意

$$1 - A = A'.$$

这是因为 $1 - A = 1 \cap A' = A'$. 特别地, $1 - 0 = 0' = 1$.

1.91. 下列两个关系

$$A - B = 0, \quad A \subset B$$

是等价的. 这是因为如果 $A \subset B$, 则由 1.85 有 $A \cap B' = 0$, 即 $A - B = 0$. 反之亦成立.

1.92. 在并与差之间的一个重要关系是

$$(A - B) \cup B = A \cup B.$$

这是因为

$$(A - B) \cup B = (A \cap B') \cup B = (A \cup B) \cap (B' \cup B)$$
$$= (A \cup B) \cap 1 = A \cup B.$$

特别地,若 $B \subset A$, 则

$$(A - B) \cup B = A.$$

这是因为如果 $B \subset A$, 则 $A \cup B = A$ 的缘故.

此外,当且仅当 $A \cap B = 0$ 时, $A - B = A$. 这是因为如果 $A - B = A$, 则 $A = A \cap B'$, 因此

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= (A \cap B') \cap B \\
&= A \cap (B' \cap B) \\
&= A \cap 0 \\
&= 0;
\end{aligned}
$$

反之，如果 $A \cap B = 0$，则

$$
\begin{aligned}
A &= A \cap 1 = A \cap (B \cup B') \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap B') \\
&= 0 \cup (A \cap B') \\
&= A \cap B' \\
&= A - B.
\end{aligned}
$$

1.93. 交关于差是可分配的，即

$$C \cap (A - B) = (C \cap A) - (C \cap B).$$

这是因为

$$
\begin{aligned}
(C \cap A) - (C \cap B) &= (C \cap A) \cap (C \cap B)' \\
&= (C \cap A) \cap (C' \cup B') \\
&= (C \cap A \cap C') \cup (C \cap A \cap B') \\
&= C \cap A \cap B' \text{（因为 } C \cap C' = 0\text{）} \\
&= C \cap (A - B).
\end{aligned}
$$

但是，并关于差却并不是可分配的，这从1.92中所考虑的并来看是很清楚的．因为集合 $(A - B) \cup B$ 包含 B 的所有元素，但集合 $(A \cup B) - (B \cup B) = (A \cup B) \cap B' = (A \cap B') \cup (B \cap B') = A \cap B'$ 却并不包含 B 的元素．

1.94. 由两个集合间的差 $A - B$，我们构造**对称差**

$$A + B,$$

它被定义为 A 与 B 之差及 B 与 A 之差的并，即

$$
\begin{aligned}
A + B &= (A - B) \cup (B - A) \\
&= (A \cap B') \cup (B \cap A').
\end{aligned}
$$

对称差可用不同的方法表示，例如

$$A+B=(A\cup B)\cap(A'\cup B').$$

这是因为

$$\begin{aligned}
&(A\cup B)\cap(A'\cup B')\\
&\quad=[(A\cup B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B']\\
&\quad=(A\cap A')\cup(B\cap A')\cup(A\cap B')\cup(B\cap B')\\
&\quad=(B\cap A')\cup(A\cap B')=A+B.
\end{aligned}$$

另一表示法是

$$A+B=(A\cup B)-(A\cap B).$$

这种表示法清楚地表明了对称差的性质：它是由属于 A 或 B，但不同时属于二者的元素所构成的集合，这一事实启发我们选用加号来表示对称差.

为了证明这个关系，我们注意

$$\begin{aligned}
(A\cup B)-(A\cap B)&=(A\cup B)\cap(A\cap B)'\\
&=(A\cup B)\cap(A'\cup B')\\
&=A+B.
\end{aligned}$$

由定义可以直接得到的另一重要关系是

$$A'+B'=A+B.$$

1.95. 正如它的名称的含意一样，对称差当然是可交换的. 因为

$$\begin{aligned}
B+A&=(B-A)\cup(A-B)\\
&=(A-B)\cup(B-A)=A+B.
\end{aligned}$$

它也是可结合的，即

$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

这是因为

$$A+B=(A\cup B)\cap(A'\cup B'),$$

因而

$$(A+B)'=(A\cap B)\cup(A'\cap B'),$$

而

$$
\begin{aligned}
&(A+B)+C \\
&\quad=[(A+B)\cup C]\cap[(A+B)'\cup C'] \\
&\quad=(A\cup B\cup C)\cap(A'\cup B'\cup C) \\
&\qquad\cap[C'\cup(A\cap B)\cup(A'\cap B')] \\
&\quad=(A\cup B\cup C)\cap(A'\cup B'\cup C) \\
&\qquad\cap[C'\cup A\cup(A'\cap B')] \\
&\qquad\cap[C'\cup B\cup(A'\cap B')] \\
&\quad=(A\cup B\cup C)\cap(A'\cup B'\cup C) \\
&\qquad\cap(A\cup B'\cup C')\cap(A'\cup B\cup C').
\end{aligned}
$$

这个表示式不因 A, C 的互换而改变（这时第一个括号变成 $C\cup B\cup A$，这是与 $A\cup B\cup C$ 相等的；第二、三两括号刚好互换位置；第四个括号变成 $C'\cup B\cup A'$，但它仍与 $A'\cup B\cup C'$ 相等），因此有

$$(A+B)+C=(C+B)+A;$$

但是 $C+B=B+C$，而 $(B+C)+A=A+(B+C)$，从而有

$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

1.96. 交关于对称差是可分配的，即

$$C\cap(A+B)=(C\cap A)+(C\cap B).$$

因为

$$
\begin{aligned}
C\cap(A+B)&=C\cap[(A-B)\cup(B-A)] \\
&=[C\cap(A-B)]\cup[C\cap(B-A)] \\
&=[(C\cap A)-(C\cap B)] \\
&\quad\cup[(C\cap B)-(C\cap A)] \\
&=(C\cap A)+(C\cap B).
\end{aligned}
$$

然而，并关于对称差却不是可分配的，例如

$$A\cup(A+B)=A\cup B,$$

但是

$$(A \cup A) + (A \cup B) = A + (A \cup B) = B \cap A'.$$

1.97. $A + A = 0$.

这是因为

$$A + A = (A \cap A') \cup (A \cap A') = 0 \cup 0 = 0.$$

1.971. 若 $A + B = 0$，则 $B = A$.

这是因为

$$A + B = (A \cap B') \cup (A' \cap B),$$

因而由 $A + B = 0$ 我们推得 $A \cap B' = 0$ 且 $A' \cap B = 0$，因此 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，从而 $A = B$.

1.972. $A_i = B_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的充要条件是

$$(A_1 + B_1) \cup (A_2 + B_2) \cup \cdots \cup (A_n + B_n) = 0.$$

因为每个方程 $A_i = B_i$ 等价于 $A_i + B_i = 0$.

1.98. 我们定义 $A + B$ 的补为 A 及 B 的叉(cross)，并且用 $A \times B$ 表示，于是

$$A \times B = (A \cap B) \cup (A' \cap B').$$

立即可以得出

$$A' \times B' = A \times B.$$

在 1.95 的结果上取补就可得到

$$A \times B = B \times A,$$

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

由 1.96 我们可以得到并关于叉是可分配的结论. 由 1.97 得

$$A \times A = 1.$$

我们注意，因为

$$(A + B)' = (A' \cup B) \cap (B' \cup A),$$

因此

$$A \times B = A' + B = A + B',$$

由此我们得到结论:

$$A \times B' = A' \times B = A + B.$$

此外，

$$A \times 1 = A + 0 = (A \cup 0) \cap (A' \cup 1) = A \cap 1 = A,$$

而且

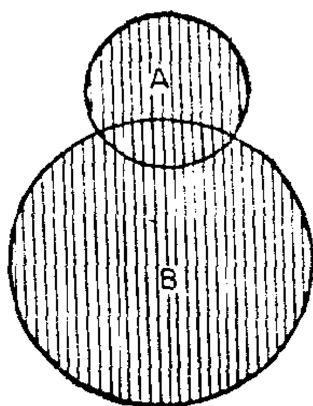
$$A \times 0 = A + 1 = (A \cup 1) \cap (A' \cup 0)$$
$$= 1 \cap A' = A'.$$

最后由 1.971 可得，当且只当 $B = A$ 时，

$$A \times B = 1.$$

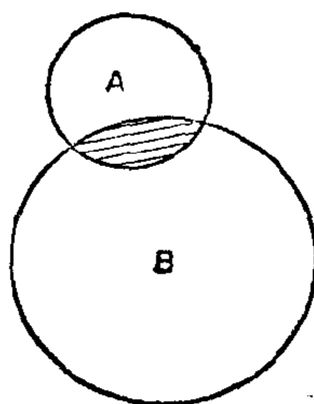
1.10. 文氏图 (Venn diagrams)

利用各种重迭的圆来代表集合的所谓文氏图（或欧拉图）是帮助理解集合关系的一种有价值的直观工具．下面的前三图是利用这种图来表示并、交及包含（分别对应于图 1，图 2，图 3）．如果我们仍用圆来表示全集合，则一个集合的补就是圆 1 中的居于圆 A 之外的部分（图4画有阴影的区域表示 A 的补）．图 5 中画有阴影的区域是 1 的居于 $A \cap B$ 之外的部分，也是 A 的外部和 B 的外部的并．



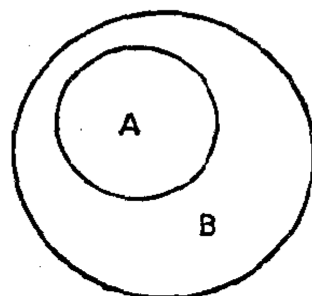
$A \cup B$

图 1



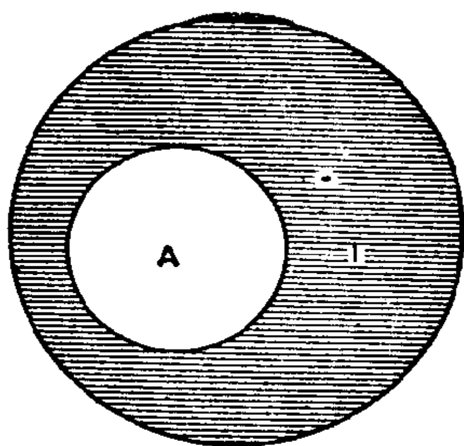
$A \cap B$

图 2



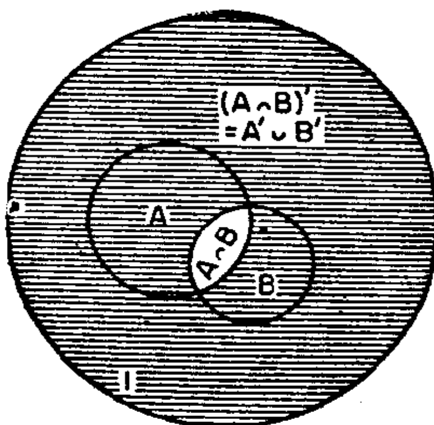
$A \subset B$

图 3



A'

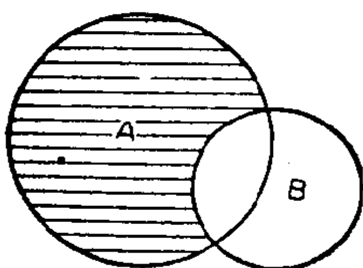
图 4



$(A \cap B)'$

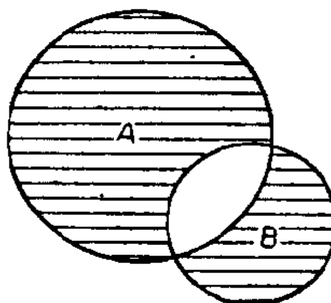
图 5

用同样方法可以表示两集合的差和对称差．图 6 中的阴影区域表示 $A-B$，图 7 中的阴影区域表示 $A+B$。



$A-B$

图 6



$A+B$

图 7

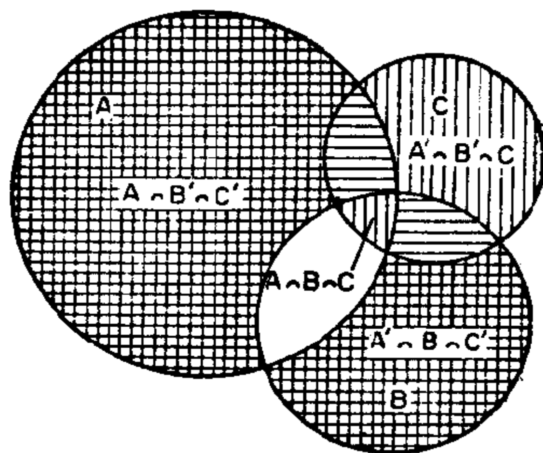


图 8

图 8 中画有水平线条的区域是 $A+B$，画有竖直线条的区域则是 $(A+B)+C$。方格区域是

$$(A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C').$$

这个图揭示了:

$$\begin{aligned}(A+B)+C\\&=(A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C')\\&\quad\cup(A'\cap B'\cap C)\cup(A\cap B\cap C).\end{aligned}$$

习　题　I

1. 证明 $A\subset B$ 与 $A'\cup B=1$ 等价.

2. 证明 $(A\cup B\cup C)'=A'\cap B'\cap C'$,

$$(A\cap B\cap C)'=A'\cup B'\cup C',$$

并推广到 n 个集合的情形上去.

3. 若 $X\subset A$ 且 $X\subset A'$，证明 $X=0$;

若 $A\subset X$ 且 $A'\subset X$，证明 $X=1$;

若 $A\subset B$，$C\subset D$，证明 $A\cup C\subset B\cup D$.

4. 若 $A\subset B'$ 不成立，证明有一个 $X\neq 0$ 能使 $X\subset A$ 及 $X\subset B$.

5. 证明 $A+B=A'+B'$.

6. 若 $A+K=B+K$，证明 $A=B$.

若 $A+B=0$，证明 $B=A$.

7. 证明 $(A+B)+(C+D)=(A+C)+(B+D)$.

8. 证明 $(A+B)'=A'+B=A+B'$,

$$(A-K)\cup(B-K)=(A\cup B)-K,$$

及

$$(A+K)\cup(B+K)=(A\cap B)+K\cup(A+B).$$

9. 证明

$$A + (A \cup B) = B + (A \cap B) = B - (A \cap B),$$
$$A \cup B = A + B + A \cap B,$$
并利用文氏图表示这些关系.

10. 若 $A \cap B = 0$, 证明 $A + B = A \cup B$.

11. 证明
$$(A + B) \times C = (A \times C) + B = A + (B \times C)$$
及
$$(A \times C) + (B \times C) = A + B.$$

12. 证明下列关系:

(1) $(A - B) + B = A \cup B$;

(2) $(A - B) \cap B = 0$;

(3) $A \cap (A - B) = A - B$;

(4) $A - B \subset A$;

(5) $A - A = 0$;

(6) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$;

(7) $A - (A - B) = A \cap B$;

(8) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$;

(9) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$;

(10) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$;

(11) $A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$;

(12) $(A \cup B) \cup (B - A) = A \cup B$.

13. 证明下列各对关系的等价性:

(1) $A \cup B = 0$, $\quad A = 0$ 及 $B = 0$;

(2) $A - B = A$, $\quad B - A = B$;

(3) $A \cup B = A - B$, $\quad B = 0$;

(4) $A - B = A \cap B$, $\quad A = 0$;

(5) $A \cup B \subset C$, $\quad A \subset C$ 且 $B \subset C$;

(6) $C \subset A \cap B$, $\quad C \subset A$ 且 $C \subset B$;

(7) $A \subset B \cup C$, $\quad A - B \subset C$;

(8) $A - B = B - A$, $\quad A = B$;

(9) $A \cap B = A \cup B$, $\quad A = B$;

(10) $A \subset B \subset C$, $\quad A \cup B = B \cap C$;

(11) $A \subset B$及$C \subset D$, $\quad (A - B) \cup (C - D) = 0$;

(12) $A = B$, $\quad (A - B) \cup (B - A) = 0$;

$(A = B)$及$(C = D)$, $\quad (A - B) \cup (B - A) \cup (C - D) \cup (D - C) = 0$;

(13) $A - X = B - X$, $\quad (A + B) \subset X$.

14. 证明

(1) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$;

(2) $(A \cup B \cup C) \cap (B \cup C \cup D) \cap (C \cup D \cup A) \cap (D \cup A \cup B) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)$;

(3) $A - (B \cup C) = (A - B) - C$;

(4) $(A - B) \cap C = (A \cap C) - B$;

(5) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$;

(6) $A - (B - A) = A$;

(7) $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$;

(8) $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$;

(9) $A - [B - (C - D)] = (A - B) \cup [(A \cap C) - D]$;

(10) $A \cup B \cup C = (A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) \cup (A \cap B \cap C)$.

15. 找寻一个由六个集合构成的类*，它包含 A 和 B，而且类中任何两个集合的差都仍在类中.

16. 证明

$$(A \cup C) \subset (A \cup B) \cup (B \cup C),$$
$$A - C \subset (A - B) \cup (B - C),$$
$$A + C \subset (A + B) \cup (B + C).$$

17. 证明

$$A - D \subset (A - B) \cup (B - C) \cup (C - D).$$

* 类通常是指以集合为元素的集合. ——译者注

第二章 自对偶的公理系统

2.0. 集合的基本性质

我们在前章所建立的集合的全部性质可以由某几个基本性质得到,而完全不必使用集合的概念.

我们首先取运算 $\cup$、$\cap$(对应于并与交)的交换律和分配律作为基本性质.

2.01. $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$

2.02. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

其次,我们假设有两个不同的"集合"0, 1, 它们对于任何 A 有

2.03. $A \cup 0 = A, \quad A \cap 1 = A.$

又对于每个集合 A, 有一个集合 A' 使

2.04. $A \cup A' = 1, \quad A \cap A' = 0.$

我们可以继续使用集合 0, 1, A, B, C, $\cdots$ 与并、交及补等术语,但是我们除了应用 2.01—2.04 列举的性质外,将毫不应用这些概念的其它任何性质.

2.1. 相　　等

我们更假设,如果 $A = B$, 则 $A' = B'$, 且对于任意集合 C, $A \cup C = B \cup C$ 及 $A \cap C = B \cap C$; 又若 $A = B$ 及 $B = C$, 则有 $B = A$ 及 $A = C$.

2.2. 唯 一 性

我们首先证明 0, 1 二者都是唯一的，而且一个集合的补也是唯一的. 为了证明零是唯一的，我们假设两个元素 0 和 X 对于所有的 A 满足 2.03. 则若依次取 0 与 X 来代替 A，并且应用2.01，我们有

$$0 = 0 \cup X = X \cup 0 = X,$$

这就证明了 $X = 0$.

同样地，如果 1 和 Y 满足 2.03，依次取 1 和 Y 来代替 A，并且应用 2.01，我们又有

$$1 = 1 \cap Y = Y \cap 1 = Y,$$

因此 $Y = 1$. 从而 0 和 1 都是唯一的集合. 更进一步，如果 A 有两个补 A' 和 A^*，二者都满足 2.04，则

$$\begin{aligned}
A^* &= A^* \cup 0 && \text{(由 2.03)}\\
&= A^* \cup (A \cap A') && \text{(由 2.04)}\\
&= (A^* \cup A) \cap (A^* \cup A') && \text{(由 2.02)}\\
&= (A \cup A^*) \cap (A^* \cup A') && \text{(由 2.01)}\\
&= 1 \cap (A^* \cup A') && \text{(由 2.04)}\\
&= (A^* \cup A') \cap 1 && \text{(再由 2.01)}\\
&= A^* \cup A'. && \text{(由 2.03)}
\end{aligned}$$

同理可得

$$A' = A' \cup A^* = A^* \cup A' = A^*,$$

这就证明了 $A^* = A'$. 因此集合 0, 1 是唯一的，一个集合的补也是唯一的.

（注意：虽然仅有一个集合 0 对于所有的 A 都有 $A \cup 0 = A$，但对于每个 A，却有其它的与 A 有关的集合 X 使得 $A \cup$

$X = A$，例如我们下面将要指出的，A 本身就是一个这样的集合．）

2.21. 其次，我们证明互补关系是对合的，即补集合的补是原集合．因为由 2.04 及 2.01

$$A' \cup A = 1, \quad A' \cap A = 0,$$

这表明 A 是 A' 的补，但补是唯一的，因此

$$A'' = A.$$

2.22. 同法可证 0 与 1 互补．因为由 2.03 及 2.01，

$$1 \cup 0 = 1, \quad 1 \cap 0 = 0;$$

但由 2.04 和补的唯一性，即得 $0 = 1'$．从而 $0' = 1'' = 1$．

2.3. 等 幂 律

在 2.03 中我们已将 1.5 节所建立的性质中的两个取作基本性质，因此尚需证明：

2.31. $$A \cup 1 = 1, \quad A \cap 0 = 0.$$

2.32. $$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

对于第一个式子我们有

$$\begin{aligned} A \cup 1 = (A \cup 1) \cap 1 = 1 \cap (A \cup 1) & \\ = (A \cup A') \cap (A \cup 1) & \\ = A \cup (A' \cap 1) & \quad \text{（由分配律）} \\ = A \cup A' & \\ = 1; & \end{aligned}$$

同样地，

$$\begin{aligned} A \cap 0 = (A \cap 0) \cup 0 = 0 \cup (A \cap 0) & \\ = (A \cap A') \cup (A \cap 0) & \\ = A \cap (A' \cup 0) & \quad \text{（由分配律）} \\ = A \cap A' & \\ = 0. & \end{aligned}$$

我们按如下步骤证明所谓等幂律 2.32:

$$
\begin{aligned}
A = A \cup 0 = A \cup (A \cap A') &= (A \cup A) \cap (A \cup A') \\
&= (A \cup A) \cap 1 \\
&= A \cup A; \\
A = A \cap 1 = A \cap (A \cup A') &= (A \cap A) \cup (A \cap A') \\
&= (A \cap A) \cup 0 \\
&= A \cap A.
\end{aligned}
$$

2.4. 吸 收 律

其次,我们证明两个吸收律:

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A.$$

对于第一式,我们有

$$
\begin{aligned}
A \cup (A \cap B) &= (A \cap 1) \cup (A \cap B) \\
&= A \cap (1 \cup B) && \text{(由分配律)} \\
&= A \cap 1 && \text{(应用 2.01 及 2.31)} \\
&= A.
\end{aligned}
$$

同样地,

$$
\begin{aligned}
A \cap (A \cup B) &= (A \cup 0) \cap (A \cup B) \\
&= A \cup (0 \cap B) = A \cup 0 = A.
\end{aligned}
$$

2.5. 对 偶 性

考察被我们取作集合的基本性质的 2.01—2.04 可以看出,这些性质表现出并与交两种运算间的对偶性;为了显示这个事实,我们将这些性质成对地并列起来.通过将 $\cup$ 与 $\cap$ 互换,2.01 的两个关系中的一个就变成另一个,此事实对于 2.02 的两个关系也是正确的. 在 2.03 及 2.04 中,如果我们还同时

调换 0 和 1，这种交换仍为有效．由此可见，在任一个由这些基本性质导出的关系中，同时交换 $\cup$ 和 $\cap$ 及 0 和 1 所给出的关系也可以从同一性质导出；因此，为了证明交换后所得到的关系，我们只需在原关系的证明中作上述的改变就行了．这种证法我们在 2.31，2.32 和 2.4 的关系对的证明中已经看到了．在每一情况中，第二个关系的证明只需在第一个关系的证明中作这种改变就可得到．今后我们将不再写出这种成对的证明，而仅提醒注意其间的对偶关系．

在下面两个定理中我们给出证明集合相等的两种重要的方法．第一个是：

2.51. 若对于 A，B，C 有

$$A \cup B = A \cup C, \quad A \cap B = A \cap C,$$

则

$$B = C.$$

因为

$$\begin{aligned} B = B \cap (B \cup A) &= B \cap (C \cup A) \\ &= (B \cap C) \cup (B \cap A) \\ &= (B \cap C) \cup (C \cap A) \\ &= C \cap (A \cup B) \\ &= C \cap (A \cup C) = C, \end{aligned}$$

这就证明了

$$B = C.$$

第二个结果是：

2.52. 若对于 A，B，C 有

$$A \cup B = A \cup C, \quad A' \cup B = A' \cup C,$$

则

$$B = C.$$

因为

$$(A \cup B) \cap (A' \cup B) = B \cup (A \cap A') = B \cup 0 = B,$$

同时

$$(A \cup C) \cap (A' \cup C) = C \cup (A \cap A') = C \cup 0 = C,$$

从而得到结果.

其对偶结果是:

由 $A \cap B = A \cap C$, $A' \cap B = A' \cap C$,

有

$$B = C.$$

2.6. 并的结合律

值得注意的是：在基本假设 2.01—2.04 中，并未包括结合律. 我们刚才建立的结果可用来证明并和交的结合律.当然,我们只须证明其中一个就可以了,因为另一个可由对偶性得到. 让我们考虑并的结合律,即

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

设

$$L = A \cup (B \cup C) \text{ 及 } M = (A \cup B) \cup C,$$

则

$$A \cap L = A \cap [A \cup (B \cup C)] = A \qquad \text{(由 2.4)}$$

且

$$A \cap M = [A \cap (A \cup B)] \cup (A \cap C)$$
$$= A \cup (A \cap C) = A, \qquad \text{(又由 2.4)}$$

因此

$$A \cap L = A \cap M.$$

更因

$$
\begin{aligned}
A' \cap L = A' \cap [A \cup (B \cup C)] \\
&= (A' \cap A) \cup [A' \cap (B \cup C)] \\
&= 0 \cup [A' \cap (B \cup C)] \\
&= A' \cap (B \cup C) \\
&= (A' \cap B) \cup (A' \cap C),
\end{aligned}
$$

而且

$$
\begin{aligned}
A' \cap M &= A' \cap [(A \cup B) \cup C] \\
&= [A' \cap (A \cup B)] \cup (A' \cap C) \\
&= [(A' \cap A) \cup (A' \cap B)] \cup (A' \cap C) \\
&= [0 \cup (A' \cap B)] \cup (A' \cap C) \\
&= (A' \cap B) \cup (A' \cap C);
\end{aligned}
$$

因此

$$A' \cap L = A' \cap M.$$

于是由 2.52，我们有 $L = M$，这就证明了并的结合性.

2.60. 结合性的一个简单推论是：若对于某两个集合 A，B 有

$$A \cup B = A \cap B,$$

则

$$A = B.$$

因为

$$
\begin{aligned}
A &= A \cap (A \cup B) = A \cap (A \cap B) \\
&= (A \cap A) \cap B = A \cap B
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
B &= B \cap (A \cup B) = B \cap (A \cap B) \\
&= (B \cap B) \cap A = B \cap A,
\end{aligned}
$$

由于 $A \cap B = B \cap A$，所以我们有

$$A = B.$$

2.61. 现在证明德·摩根律：

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

考虑

$$
\begin{aligned}
&(A \cup B) \cup (A' \cap B') \\
&\quad = (A \cup B \cup A') \cap (A \cup B \cup B') \quad (\text{由 } 2.02) \\
&\quad = [(A \cup A') \cup B] \cap [A \cup (B \cup B')] \\
&\quad = (1 \cup B) \cap (A \cup 1) \\
&\quad = 1 \cap 1 = 1.
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
&(A \cup B) \cap (A' \cap B') \\
&\quad = (A' \cap B' \cap A) \cup (A' \cap B' \cap B) \\
&\quad = [(A \cap A') \cap B'] \cup [A' \cap (B \cap B')] \\
&\quad = (0 \cap B') \cup (A' \cap 0) \\
&\quad = 0 \cup 0 = 0;
\end{aligned}
$$

由于补是唯一的，而且 $A' \cap B'$ 满足补的两个确定的特征 2.04，因而 $A' \cap B'$ 是 $A \cup B$ 的补，这就是所要证明的. 第二个结果可由对偶性得到.

2.62. 包含 我们在 1.62 节中证明过：当且只当 $A = A \cap B$ 时，$A \subset B$. 现在我们用这个等价性来定义包含关系. 这就是说，我们定义 $A \subset B$（读作 A 包含于 B 中）来代替 $A = A \cap B$.

首先我们注意方程 $A = A \cap B$ 等价于 $B = A \cup B$. 因为如果 $A = A \cap B$，则 $B = B \cup (B \cap A) = B \cup A = A \cup B$；反之，若 $B = A \cup B$，则

$$A = A \cap (A \cup B) = A \cap B.$$

此定义的直接推论是：对于所有的 A，

$$0 \subset A, \quad A \subset 1.$$

这是因为

$$0 \cap A = 0, \quad 1 \cap A = A.$$

2.63. 包含关系是可传的，也就是说，

$$若\ A \subset B\ 且\ B \subset C，则\ A \subset C.$$

我们必须证明：

$$若\ A = A \cap B\ 且\ B = B \cap C，则\ A = A \cap C.$$

这是因为

$$A \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B = A.$$

2.64. 条件 $A \subset B$ 等价于 $A \cap B' = 0$. 因为如果 $A \subset B$，则 $A = A \cap B$，从而

$$A \cap B' = (A \cap B) \cap B' = A \cap (B \cap B') = A \cap 0 = 0.$$

反之，如果 $A \cap B' = 0$，则

$$A = A \cap 1 = A \cap (B \cup B') = (A \cap B) \cup (A \cap B')$$
$$= (A \cap B) \cup 0 = A \cap B.$$

由此也证明了 $A \subset B$ 等价于 $A' \cup B = 1$.

2.65. 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则 $A = B$. 因为由 $A \subset B$ 及 $B \subset A$ 有

$$A = A \cap B = B \cap A = B.$$

反之，若 $A = B$ 则 $A \subset B$. 这是因为由 $A = B$ 有

$$A = A \cap A = A \cap B.$$

特别地，$A \subset A$. 这是因为 $A = A \cap A$.

2.66. 对于任何集合 A, B，

$$A \cap B \subset A, \quad A \subset A \cup B.$$

我们有

$$(A \cap B) \cap A = (A \cap A) \cap B = A \cap B,$$

这就证明了

$$A \cap B \subset A;$$

又因

$$A \cup (A \cup B) = (A \cup A) \cup B = A \cup B,$$

这又证明了

$$A \subset A \cup B.$$

2.67. 现在我们列出在前章证明过的一系列关系，这些关系借助于本章现已建立的性质就能证明。由于证明与前面给出的相同，这里不再重复；我们给出它们的节数以作参考。

若 $A \subset B$ 且 $A \subset C$，则 $A \subset B \cap C$. (1.82)

若 $A \subset C$ 且 $B \subset C$，则 $A \cup B \subset C$. (1.82)

若 $A \subset B$，则 $A \cap C \subset B \cap C$ 且 $A \cup C \subset B \cup C$. (1.83)

若对于一切 A 都有 $B \subset A$，则 $B = 0$. (1.86)

若对于一切 A 都有 $A \subset B$，则 $B = 1$. (1.86)

定义差 $A - B$ 等于 $A \cap B'$，我们有

$$1 - A = A', \tag{1.9}$$

$$A - B = 0 \text{ 等价于 } A \subset B, \tag{1.91}$$

$$(A - B) \cup B = A \cup B. \tag{1.92}$$

因此，若 $B \subset A$，则 $(A - B) \cup B = A$。

若 $A \cap B = 0$，则 $A - B = A$. (1.92)

$$C \cap (A - B) = (C \cap A) - (C \cap B). \tag{1.93}$$

定义对称差 $A + B$ 为 $(A - B) \cup (B - A)$，我们有

$$A + B = (A \cup B) \cap (A' \cup B'), \tag{1.94}$$

$$A + B = B + A, \tag{1.95}$$

$$\begin{aligned}(A + B) + C &= A + (B + C) \\ &= (A \cup B \cup C) \cap (A' \cup B' \cup C) \\ &\quad \cap (A \cup B' \cup C') \cap (A' \cup B \cup C') \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B' \cap C) \\ &\quad \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C'). \end{aligned} \tag{1.95}$$

我们只详细证明最末一个结果，因为在 1.10 中的证明是以文氏图给出的。我们有

$$
\begin{aligned}
(A + B) + C = \{[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] \cap C'\} \\
\cup \{[A \cap B') \cup (A' \cap B)]' \cap C\} \\
= \{[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] \cap C'\} \\
\cup \{(A' \cup B) \cap (A \cup B') \cap C\} \\
= (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \\
\cup (A' \cap A \cap C) \cup (A' \cap B' \cap C) \\
\cup (B \cap A \cap C) \cup (B \cap B' \cap C) \\
= (A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B' \cap C) \\
\cup (A' \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C').
\end{aligned}
$$

2.7. 标准形式与公理系统的完备性

由集合 A, B, C, $\cdots$ 利用并、交和补所构成的任何表示式，都可简化为标准形式

$$U_1 \cap U_2 \cap U_3 \cap \cdots \cap U_k,$$

此处每个 U 是集合或补的并. 为了实现这种简化，我们利用德·摩根律将并或交的补用补的交或并代替，并且应用分配律将并分配到交上面去. 换句话说，我们把补运算取到括号里面去，并展开被并分开的交. 为了举例说明这种简化，我们考虑式子

$$(A \cap B \cap C) \cup [(C \cup D)' \cup (D' \cap E)]',$$

由德·摩根律及分配律我们把它依次变换成

$$
\begin{aligned}
(A \cap B \cap C) \cup [(C \cup D) \cap (D \cup E')] \\
= (A \cup C \cup D) \cap (A \cup D \cup E') \\
\cap (B \cup C \cup D) \cap (B \cup D \cup E') \\
\cap (C \cup D) \cap (C \cup D \cup E'),
\end{aligned}
$$

这就是标准形式.

任意表示式都能化成的第二标准形式是

$$I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k,$$

此处每个 I 是元素或补元素的交. 这种形式可以同上面完全一样地得到,不过要应用分配律将交分配到并上面去的;或者我们可以首先把所给式子的补变换成形式

$$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k.$$

这个式子的补就是第二标准形式(因为交的补是并,而并的补是交).

例如下式

$$(A \cup C \cup D) \cap (A \cup D \cup E') \cap (B \cup C \cup D) \cap (B \cup D \cup E') \cap (C \cup D) \cap (C \cup D \cup E')$$

的补是

$$(A' \cap C' \cap D') \cup (A' \cap D' \cap E) \cup (B' \cap C' \cap D') \cup (B' \cap D' \cap E) \cup (C' \cap D') \cup (C' \cap D' \cap E).$$

这两种标准形式中的每一个都提供一个确定一个式子是否等于零的纯机械的方法. 例如, 当且仅当每个 $I_1, I_2, \cdots, I_k$ 都等于零时,具有标准形式

$$I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k$$

的式子等于零; 而元素或补元素的一个交当且仅当某个元素和它的补同时出现时方等于零. 因此

$$(A \cap B \cap A') \cup (B \cap C \cap C')$$

等于零,因为它是两个交的并,而在每个交中又同时出现某个集合和它的补.

例如要证明

$$(A' \cap B)' \cap (A \cap C)' \cap B \cap C = 0.$$

我们陆续地将左端变形:

$$(A \cup B') \cap (A' \cup C') \cap B \cap C$$
$$= [(A \cap B) \cup (B' \cap B)] \cap [(A' \cap C) \cup (C' \cap C)]$$
$$= [(A \cap B) \cap (A' \cap C)] \cup [(A \cap B) \cap C \cap C']$$
$$\cup [(B \cap B') \cap A' \cap C] \cup (B \cap B' \cap C \cap C')$$
$$= (A \cap A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C \cap C')$$
$$\cup (B \cap B' \cap A' \cap C) \cup (B \cap B' \cap C \cap C')$$
$$= 0.$$

(当然,在这个例子中我们可以在开始证明时就用0代替 $B \cap B'$ 及 $C \cap C'$, 以使证明更简短些.)

2.71. 如果我们将任意一个由集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 通过取补、并及交所构成的式子用 $f(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 表示, 则我们用 $f(A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}, 0, A_{r+1}, \cdots, A_n)$ 表示以0代替 $f(A_1, \cdots, A_n)$ 中的 A_r 而得到的式子, 同样, 我们用 $f(A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}, 1, A_{r+1}, \cdots, A_n)$ 表示以1代替 $f(A_1, \cdots, A_n)$ 中的 A_r 时而得到的式子.

我们将证明每个式子 $f(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 都可以由 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 及其补,连同着仅仅包含0, 1的式子而得到.

首先考察仅仅包含单独一个集合 A 的式子 $f(A)$, 我们证明

2.72. $$f(A) = \{A \cup f(0)\} \cap \{A' \cup f(1)\}.$$

首先注意,如果 $f(A) = A$, 则这个关系变为

$$A = (A \cup 0) \cap (A' \cup 1),$$

这个式子当然是正确的.

其次,我们注意, 如果2.72对某一式子 $f(A)$ 成立, 则对于这式子的补也成立,因为 $\{A \cup f(0)\} \cap \{A' \cup f(1)\}$ 的补是

$$\{A' \cap f'(0)\} \cup \{A \cap f'(1)\}$$
$$= \{A \cup f'(0)\} \cap \{A' \cup f'(1)\}. \text{(习题 II, 1(11))}$$

此外，若 2.72 对于两个式子 $f(A)$，$g(A)$ 成立，则对它们的并也成立，这是因为

$$[\{A\cup f(0)\}\cap\{A'\cup f(1)\}]$$
$$\cup[\{A\cup g(0)\}\cap\{A'\cup g(1)\}]$$
$$=\{A\cup f(0)\cup g(0)\}\cap\{A'\cup f(1)\cup g(1)\}.$$

（习题 II，1(4)）

最后，2.72 对于满足 2.72 的 $f(A)$，$g(A)$ 的交也成立，这是因为

$$\{A\cup f(0)\}\cap\{A'\cup f(1)\}\cap\{A\cup g(0)\}\cap\{A'\cup g(1)\}$$
$$=\{A\cup(f(0)\cap g(0))\}\cap\{A'\cup(f(1)\cap g(1))\}.$$

由于每个式子都是由补、并及交构成的，故 2.72 对于任何式子 $f(A)$ 都成立.

注意 2.72 甚至对于 $f(A)$ 是某一个根本不含 A 的式子 K（因而 $f(0)=f(1)=K$）也能成立，这是因为

$$(A\cup K)\cap(A'\cup K)=(A\cap A')\cup K=K.$$

现在考虑由集合 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 及 A 构成的式子 $f(A, A_1, A_2, \cdots, A_n)$，同前面完全一样，我们有

2.73. $$f(A, A_1, A_2, \cdots, A_n)$$
$$=\{A\cup f(0, A_1, A_2, \cdots, A_n)\}$$
$$\cap\{A'\cup f(1, A_1, A_2, \cdots, A_n)\}.$$

这是因为在 $f(A, A_1, \cdots, A_n)$ 实际上并不包含 A，因而

$$f(A, A_1, \cdots, A_n)=f(0, A_1, A_2, \cdots, A_n)$$
$$=f(1, A_1, A_2, \cdots, A_n)=K$$

时这个关系是成立的.

其次，当 $f(A, A_1, \cdots, A_n)=A\cup g(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 或 $A\cap g(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 时它也能成立（因为 $g(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 不包含 A），而且如果它对于某些式子成立，则对于它们的补、并和交也成立. 因此 2.73 对于一切式子都成立.

由 2.73，我们可以逐步地把任一个式子表成所需要的形式．首先我们注意到 2.72 把 $f(A)$ 用 A, 0 及 1 表出．应用 2.72 及 2.73 我们有

$$f(A, B)=\{A \cup f(0, B)\} \cap \{A' \cup f(1, B)\};$$

但因

$$f(0, B)=\{B \cup f(0, 0)\} \cap \{B' \cup f(0, 1)\},$$

$$f(1, B)=\{B \cup f(1, 0)\} \cap \{B' \cup f(1, 1)\}.$$

所以

$$\begin{aligned} f(A, B)=&\{A \cup B \cup f(0, 0)\} \cap \{A \cup B' \cup f(0, 1)\} \\ &\cap \{A' \cup B \cup f(1, 0)\} \cap \{A' \cup B' \cup f(1, 1)\}. \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} f(A, B, C)=&\{A \cup B \cup C \cup f(0, 0, 0)\} \\ &\cap \{A \cup B \cup C' \cup f(0, 0, 1)\} \\ &\cap \{A \cup B' \cup C \cup f(0, 1, 0)\} \\ &\cap \{A' \cup B \cup C \cup f(1, 0, 0)\} \\ &\cap \{A \cup B' \cup C' \cup f(0, 1, 1)\} \\ &\cap \{A' \cup B \cup C' \cup f(1, 0, 1)\} \\ &\cap \{A' \cup B' \cup C \cup f(1, 1, 0)\} \\ &\cap \{A' \cup B' \cup C' \cup f(1, 1, 1)\}, \end{aligned}$$

等等．

当然，每个式子 $f(U_1, U_2, \cdots, U_n)$，当每个 U 是 0 或 1 时，是等于 0 或 1 的．因此，如果通过在 2.72 中按一切可能方式使 $f(0)$、$f(1)$ 取 0 或 1，我们就得到含 A 的所有不同的(即不等的)式子：

$$(A \cup 0) \cap (A' \cup 0)=A \cap A'=0,$$

$$(A \cup 0) \cap (A' \cup 1)=A \cap 1=A,$$

$$(A \cup 1) \cap (A' \cup 0)=1 \cap A'=A',$$

$$(A \cup 1) \cap (A' \cup 1)=1 \cap 1=1.$$

这表明每个只含 A 的式子与 0, 1, A 及 A' 中的一个相等.

同理可见，每个只含 A, B 的式子是下列 16 个式子中的一个：

$$\{A \cup B \cup 0\} \cap \{A \cup B' \cup 0\} \cap \{A' \cup B \cup 0\} \cap \{A' \cup B' \cup 0\} = 0,$$

$$\{A \cup B \cup 0\} \cap \{A \cup B' \cup 0\} \cap \{A' \cup B \cup 0\} \cap \{A' \cup B' \cup 1\} = A \cap B,$$

$$(A \cup B \cup 0) \cap (A \cup B' \cup 0) \cap (A' \cup B \cup 1) \cap (A' \cup B' \cup 0) = A - B,$$

$$(A \cup B \cup 0) \cap (A \cup B' \cup 0) \cap (A' \cup B \cup 1) \cap (A' \cup B' \cup 1) = A,$$

$$(A \cup B \cup 0) \cap (A \cup B' \cup 1) \cap (A' \cup B \cup 0) \cap (A' \cup B' \cup 0) = B - A,$$

$$(A \cup B \cup 0) \cap (A \cup B' \cup 1) \cap (A' \cup B \cup 0) \cap (A' \cup B' \cup 1) = B,$$

$$(A \cup B \cup 0) \cap (A \cup B' \cup 1) \cap (A' \cup B \cup 1) \cap (A' \cup B' \cup 0) = A + B,$$

$$(A \cup B \cup 0) \cap (A \cup B' \cup 1) \cap (A' \cup B \cup 1) \cap (A' \cup B' \cup 1) = A \cup B,$$

$$(A \cup B \cup 1) \cap (A \cup B' \cup 0) \cap (A' \cup B \cup 0) \cap (A' \cup B' \cup 0) = A' \cap B',$$

$$(A \cup B \cup 1) \cap (A \cup B' \cup 0) \cap (A' \cup B \cup 0) \cap (A' \cup B' \cup 1) = (A + B)',$$

$$(A \cup B \cup 1) \cap (A \cup B' \cup 0) \cap (A' \cup B \cup 1) \cap (A' \cup B' \cup 0) = B',$$

$$(A \cup B \cup 1) \cap (A \cup B' \cup 0) \cap (A' \cup B \cup 1) \cap (A' \cup B' \cup 1) = A \cup B',$$

$$(A \cup B \cup 1) \cap (A \cup B' \cup 1) \cap (A' \cup B \cup 0)$$

$$\cap (A' \cup B' \cup 0) = A',$$

$$(A \cup B \cup 1) \cap (A \cup B' \cup 1) \cap (A' \cup B \cup 0)$$
$$\cap (A' \cup B' \cup 1) = A' \cup B,$$

$$(A \cup B \cup 1) \cap (A \cup B' \cup 1) \cap (A' \cup B \cup 1)$$
$$\cap (A' \cup B' \cup 0) = A' \cup B',$$

$$(A \cup B \cup 1) \cap (A \cup B' \cup 1) \cap (A' \cup B \cup 1)$$
$$\cap (A' \cup B' \cup 1) = 1.$$

2.74. 由上节直接可得，**如果对于每个 $\boldsymbol{A_i}$ 的值 0，1，两个式子 $\boldsymbol{f(A_1, A_2, \cdots, A_n)}$ 和 $\boldsymbol{g(A_1, A_2, \cdots, A_n)}$ 相等，则方程 $\boldsymbol{f(A_1, A_2, \cdots, A_n) = g(A_1, A_2, \cdots, A_n)}$ 可以由 2.01—2.04 证明．** 作为例子考虑两个集合的情形．由假设 $f(0, 0) = g(0, 0)$，$f(0, 1) = g(0, 1)$，$f(1, 0) = g(1, 0)$ 及 $f(1, 1) = g(1, 1)$，因此

$$\begin{aligned} f(A, B) &= \{A \cup B \cup f(0, 0)\} \cap \{A \cup B' \cup f(0, 1)\} \\ &\quad \cap \{A' \cup B \cup f(1, 0)\} \cap \{A' \cup B' \cup f(1, 1)\} \\ &= \{A \cup B \cup g(0, 0)\} \cap \{A \cup B' \cup g(0, 1)\} \\ &\quad \cap \{A' \cup B \cup g(1, 0)\} \cap \{A' \cup B' \cup g(1, 1)\} \\ &= g(A, B). \end{aligned}$$

因此，**能由第一章的方法建立起来的集合代数的每个关系都可由 2.01—2.04 来证明．**这是因为，关系式

$$f(A_1, A_2, \cdots, A_n) = g(A_1, A_2, \cdots, A_n)$$

对任何集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都成立，特别地，对于集合 0，1 也成立，从而是能够由 2.01—2.04 来证明．我们把上面这个结果说成是：**性质 2.01—2.04 对于它们作为一个集合代数的解释来说是完备的．**我们也因此找到了一个检验一个关系是否可以证明的纯机械的方法，我们只须检验它对集合0，1 是否成立．例如要看关系

$$(A \cup B') \cap B = A \cap B$$

是否可以证明,我们作出下表:

A	B	B'	$A \cup B'$	$(A \cup B') \cap B$	$A \cap B$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1

在前两列中,我们写入 A 和 B 的取值 0,1 的四种可能组合;在第三列的每一行中,我们写入同一行中 B 的值的补;在第四列的每一行中,我们写入 A 和 B' 的值的并(例如在第一行写入 $0 \cup 1 = 1$),等等. 第五、六两列完全相同的事实表明上述方程成立,从而是可证明的.

2.8. 公理的独立性

基本关系 2.01—2.04 构成所谓**布尔代数的公理系统**;这个特殊的公理系统是由 E. V. 亨廷顿(Huntington)于 1904 年给出的.而"布尔代数"这个名称则系由 G. 布尔(Boole)得来,他第一次在他的著作《逻辑的数学分析》(1847)及《思维规律》(1854)中引进这种代数的基本概念和性质. 我们在前章已经看到,如果把变元 $A, B, C, \cdots$ 解释为集合,元素 0, 1 分别代表空集和全集,A' 代表 A 在 1 中的补,则公理 2.01—2.04 表示真语句. 由于这个原因,我们说集合代数是公理 2.01—2.04 的一个模型. 这公理的另一个完全不同种类的模型是由 30 的所有因数给出的. 如果我们使变元 $A, B, C, \cdots$ 取值 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30,并将 $A \cup B$ 解释为 A, B 的最小公倍数,而将 $A \cap B$ 解释为最大公约数(**0** 代表 1 而 **1** 代表 30),则可以验证,关系 2.01—2.04 仍表示真理,即算术真

理(参看习题 II, 10).

我们把布尔代数形式地定义为至少包含 0,1 两个元素的一个集合 Σ,它有三个运算：补、并及交,并分别用 A',$A\cup B$,$A\cap B$ 表示．这就是说,对于 Σ 的所有元素 A, B 来说, A', $A\cup B$, $A\cap B$ 都是 Σ 的元素并满足 2.01—2.04．对于 Σ 的任意 A, B, 如果 A', $A\cup B$, $A\cap B$ 属于 Σ, 那末我们就说 Σ 在补、并和交的运算下是**封闭**的．在公理中,字母 A, B, C 代表集合 Σ 的任意元素，而不只是三个特殊的元素．我们有各种方法能够使公理的一般性表示出来．我们可以假设 2.01—2.04 不是实际的公理而是一种模型，通过取实际的元素来代替 Σ, 就可由这个模型构成公理；另一方面，如果 Σ 有异于 0 和 1 的元素,则我们也可以把 Σ 的元素看作能被元素取代的“变元”．在第一种情况下，A, B, C 本身都不是元素,而公理的数目也是无限制的, 2.01—2.04 的每个用元素代替 A,B,C 的具体例子都是一个公理．在第二种情况下, A, B, C 本身是元素且 2.01—2.04 是仅有的公理，但此时我们还需要一个容许我们用元素替换 A, B, C 的替换法则．我们没有必要来考虑区别这两种情况,但当我们讨论某种特殊的布尔代数时,例如，以集合 (a, b, c) 的子集（包括空集 0 和全集 $1=(a, b, c)$）为元素的布尔代数,则各公理必须借助于变元表出,这些变元本身不是代数的元素．

我们现在称为公理的基本性质 2.01—2.04 是相互独立的,这就是说,它们之中没有一个是可以省略的,即它们之中的每一个也不是其它几个的推论．为了证明这一点，我们将举出一些模型，它们满足除一个公理外的所有其余各公理及其全部推论.*

2.81. 我们首先考虑恰有两个元素 0，1 的代数，这两个元素

* 这句话不妥.因为如果2.03不成立,则2.04显然不能予以考虑.——译者注

的每一个是另一个元素的补，运算$\cup$，$\cap$由下列二表定义：

$\cup$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cap$	0	1
0	0	0
1	0	1

在这代数中除了第一个分配律外所有公理都成立. 公理 2.01 能被满足是显然的，因为以上二表关于它们的主对角线是对称的；为了证明 2.03 我们只须检验 $1\cup 0=1, 0\cup 0=0$, $1\cap 1=1$, $0\cap 1=0$, 而这是可以从表中直接看出来的；公理 2.04 同样地需要验证 $0\cup 1=1\cup 0=1$ 和 $0\cap 1=1\cap 0=0$；对于第二分配律，我们分别考虑 $A=0$ 及 $A=1$ 二种情况.

对于 $A=0$，我们有

$$0\cap(B\cup C)=0=0\cap B$$
$$=0\cap C=(0\cap B)\cup(0\cap C),$$

而对于 $A=1$，有

$$1\cap(B\cup C)=B\cup C,\ 1\cap B=B,\ 1\cap C=C,$$
$$(1\cap B)\cup(1\cap C)=B\cup C,$$

这就证明了第二分配律成立. 但第一分配律是不成立的，这是因为

$$1\cup(1\cap 0)=1,$$

但

$$(1\cup 1)\cap(1\cup 0)=0\cap 1=0.$$

2.82. 显示第二分配律的独立性的代数仍是一个恰有两个元素 0，1 所组成的代数，其中每一个元素是另一个元素的补，且$\cap$和$\cup$由下表定义：

$\cup$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cap$	0	1
0	1	0
1	0	1

我们将略去第二分配律以外的所有公理的详细证明；第二分配律不能被满足，这是因为

$$0 \cap (0 \cup 1) = 0 \cap 1 = 0,$$

但

$$(0 \cap 0) \cup (0 \cap 1) = 1 \cup 0 = 1.$$

对于交换律 2.01，我们可由下列各模型证明它们的独立性：

2.83.

∪	0	1
0	0	0
1	1	1

∩	0	1
0	0	0
1	0	1

2.84.

∪	0	1
0	0	1
1	1	1

∩	0	1
0	0	0
1	1	1

第一模型表明公理 $A \cup B = B \cup A$ 的独立性；而第二个模型则表明公理 $A \cap B = B \cap A$ 的独立性.

我们仍然只是用适当的模型来表明一个公理不能成立，而把能够成立的公理的验证工作留给读者．在现在的例子中，交换律不成立是显然的，因为在第一个模型中，

$$0 \cup 1 = 0, \quad 1 \cup 0 = 1;$$

而在第二个模型中，

$$0 \cap 1 = 0, \quad 1 \cap 0 = 1.$$

然而，因为在 2.83 中 0 和 1 均满足 $A \cup 0 = A$（即零不是唯一的），故我们不能顾及公理 2.04；在 2.84 中的单位元素不是唯一的.

显示公理 $A \cup 0 = A$ 的独立性而同时又能保证其余公

理成立的模型是

2.85.

$\cup$	a	b
a	a	a
b	a	a

$\cap$	a	b
a	a	a
b	a	b

在这模型中，没有一个元素能起零的作用，因而公理2.04不能予以考虑.

显示公理 $A\cap 1 = A$ 的独立性的模型是

2.86.

$\cup$	a	b
a	a	b
b	b	b

$\cap$	a	b
a	b	b
b	b	b

在这模型中没有单位元素，因而也不能考虑公理 2.04.

为了证明互补公理的独立性，我们可以利用模型*

$\cup$	a	b
a	a	b
b	b	b

$\cap$	a	b
a	a	b
b	b	b

这里的 a 起着 0 和 1 的作用，而且 b 没有补.

最后我们注意，如果存在单一集合 a，它能适合条件

$$a\cup a = a, \quad a\cap a = a,$$

则一切公理都能满足；这就表明，我们为什么规定至少要有两个集合，就是说，我们要求零和单位元素是不同的.

2.9. 对的一种代数，同构与同态

本节将建立由一个布尔代数的元素对构成的布尔代数.

* 这个模型也不满足公理 2.03，因为这个公理要求 0 与 1 不同.——译者注

首先定义对的补、并、交.

(A, B) 的补定义为 (A', B'),

(A_1, B_1), (A_2, B_2) 的并是

$$(A_1, B_1) \cup (A_2, B_2) = (A_1 \cup A_2, B_1 \cap B_2),$$

它们的交是

$$(A_1, B_1) \cap (A_2, B_2) = (A_1 \cap A_2, B_1 \cup B_2).$$

我们首先注意,公理 2.01 是显然满足的,现在着手证明分配律,我们有

$$\begin{aligned}
&(A_1, B_1) \cup \{(A_2, B_2) \cap (A_3, B_3)\} \\
&\quad = (A_1, B_1) \cup (A_2 \cap A_3, B_2 \cup B_3) \\
&\quad = (A_1 \cup (A_2 \cap A_3), B_1 \cap (B_2 \cup B_3)) \\
&\quad = ((A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3), (B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_3));
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
&[(A_1, B_1) \cup (A_2, B_2)] \cap [(A_1, B_1) \cup (A_3, B_3)] \\
&\quad = (A_1 \cup A_2, B_1 \cap B_2) \cap (A_1 \cup A_3, B_1 \cap B_3) \\
&\quad = ((A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3), (B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_3)).
\end{aligned}$$

这就证明了 2.02 的第一个式子. 对于第二个有

$$\begin{aligned}
&(A_1, B_1) \cap [(A_2, B_2) \cup (A_3, B_3)] \\
&\quad = (A_1, B_1) \cap (A_2 \cup A_3, B_2 \cap B_3) \\
&\quad = (A_1 \cap (A_2 \cup A_3), B_1 \cup (B_2 \cap B_3)) \\
&\quad = ((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3), (B_1 \cup B_2) \cap (B_1 \cup B_3));
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
&[(A_1, B_1) \cap (A_2, B_2)] \cup [(A_1, B_1) \cap (A_3, B_3)] \\
&\quad = (A_1 \cap A_2, B_1 \cup B_2) \cup (A_1 \cap A_3, B_1 \cup B_3) \\
&\quad = ((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3), (B_1 \cup B_2) \cap (B_1 \cup B_3)).
\end{aligned}$$

这就证明了第二个分配律.

零和单位元素对分别是 $(0, 1)$ 和 $(1, 0)$, 我们有

$$(A, B) \cup (0, 1) = (A \cup 0, B \cap 1) = (A, B),$$

又

$$(A, B) \cap (1, 0) = (A \cap 1, B \cup 0) = (A, B),$$

这就验证了 2.03，又因

$$(A, B) \cup (A, B)' = (A, B) \cup (A', B')$$
$$= (A \cup A', B \cap B') = (1, 0),$$
$$(A, B) \cap (A, B)' = (A, B) \cap (A', B')$$
$$= (A \cap A', B \cup B') = (0, 1),$$

这就完成了所有公理的证明.

2.91. 从对 (A, B) 的集合中选取一子集，它是由形如(A, A')的对构成的，我们可以看到，由于我们刚才的证明，这个集合本身构成一个布尔代数(因为零和单位元素对$(0, 1)$，$(1, 0)$本身都具有这种形式). 在元素A和对(A, A')之间存在着一个一一对应关系，这是因为对于每个元素A恰好对应着一个对(A, A')，而对于每个对(A, A')也对应着它的第一项A.我们用记号

$$A \longleftrightarrow (A, A')$$

表示这种对应. 这种一一对应关系在补、并、交运算下仍被保持，而且一个集合中的零和单位元素分别对应于另一个集合中的零和单位元素：

$$A \longleftrightarrow (A, A'), \quad A' \longleftrightarrow (A', A) = (A, A')',$$
$$A \cup B \longleftrightarrow (A \cup B, A' \cap B') = (A, A') \cup (B, B'),$$
$$A \cap B \longleftrightarrow (A \cap B, A' \cup B') = (A, A') \cap (B, B');$$

而且

$$0 \longleftrightarrow (0, 1), \quad 1 \longleftrightarrow (1, 0).$$

两个集合之间的一个能够保持补、并、交的一一对应称为一个**同构**，明确地说，称为布尔同构. 因此对(A, A')的代数同构于集合A的代数.

2.92. 在对(A, B)和对(A, A')之间的关系是一个多对一的

关系，因为对于所有的 B 的一切对 (A, B) 都对应于单一的对 (A, A'). 我们用记号

$$(A, B) \to (A, A')$$

来表示这种关系，并称对 (A, B) 的集合被映射到对 (A, A') 的集合上. 对于每个对 (A, B) 对应着单一的对 (A, A')，但是每个 (A, A') 却是所有以 A 为第一项的对 (A, B) 的"映象". 这个对应，也象我们在前面所考虑的同构对应一样，保持补、并及交. 事实上，我们有

$$(A, B) \to (A, A'),$$

$$(A, B)' = (A', B') \to (A', A) = (A, A')',$$

$$(A_1, B_1) \cup (A_2, B_2) = (A_1 \cup A_2, B_1 \cap B_2)$$

$$\to (A_1 \cup A_2, A_1' \cap A_2') = (A_1, A_1') \cup (A_2, A_2'),$$

及

$$(A_1, B_1) \cap (A_2, B_2) = (A_1 \cap A_2, B_1 \cup B_2)$$

$$\to (A_1 \cap A_2, A_1' \cup A_2') = (A_1, A_1') \cap (A_2, A_2').$$

一个保持补、并及交的多对一对应称为**同态**，或明确地说，称为布尔同态. 因此，在对 (A, B) 及对 (A, A') 之间的关系是一个同态，在对 (A, B) 及集合 A 之间的关系也是一个同态. 在对 (A, B) 到集合 A 上的同态中，所有对 $(0, B)$ 映射到零 0 上，而所有对 $(1, B)$ 则映射到单位 1 上.

2.93. 在 $(0, B)$ 和 B' 间的一一对应保持并与交，因为

$$(0, B_1) \cup (0, B_2) = (0, B_1 \cap B_2) \longleftrightarrow B_1' \cup B_2',$$

$$(0, B_1) \cap (0, B_2) = (0, B_1 \cup B_2) \longleftrightarrow B_1' \cap B_2'.$$

但补运算却不能保持，因为 $(0, B)$ 的补已不再是这种对的集合中的元素了.

保持并与交但不保持补的一一对应称为**偏（或格）同构**. 然而由所有对 $(0, B)$ 及 $(1, B)$ 所构成的集合到 B' 上的映射却是一个布尔同态，这是因为

$$(0, B)' = (1, B') \longleftrightarrow B = (B')',$$
$$(1, B)' = (0, B') \longleftrightarrow B;$$
$$(0, B_1) \cup (0, B_2) = (0, B_1 \cap B_2) \longleftrightarrow B_1' \cup B_2',$$
$$(0, B_1) \cup (1, B_2) = (1, B_1 \cap B_2) \longleftrightarrow B_1' \cup B_2',$$
$$(1, B_1) \cup (1, B_2) = (1, B_1 \cap B_2) \longleftrightarrow B_1' \cup B_2';$$
而且
$$(0, B_1) \cap (0, B_2) = (0, B_1 \cup B_2) \longleftrightarrow B_1' \cap B_2',$$
$$(0, B_1) \cap (1, B_2) = (0, B_1 \cup B_2) \longleftrightarrow B_1' \cap B_2',$$
$$(1, B_1) \cap (1, B_2) = (1, B_1 \cup B_2) \longleftrightarrow B_1' \cap B_2'.$$

2.94. 对于一个固定的集合 K，A 到 $A \cup K$ 上的映射保持并与交，因为
$$A_1 \cup A_2 \to (A_1 \cup A_2) \cup K = (A_1 \cup K) \cup (A_2 \cup K),$$
$$A_1 \cap A_2 \to (A_1 \cap A_2) \cup K = (A_1 \cup K) \cap (A_2 \cup K);$$
但是它却不能保持补，因为
$$(A \cup K)' = A' \cap K';$$
这样一个对应可称为**偏(或格)同态**.

2.95. 一个偏同态(特别地，一个偏同构)保持包含的关系，因为若 $A \to A^*$ 且 $A \subset B$，则 $A = A \cap B$，因而
$$A^* = (A \cap B)^* = A^* \cap B^*,$$
这就证明了 $A^* \subset B^*$.

2.96. 如果一个布尔同态(特别地，一个布尔同构)将一个元素为 $A, B, C, \cdots$ 的布尔代数映射到一个元素为 $a, b, c, \cdots$ 且对于补、并及交为封闭的集合上，则元素 $a, b, c, \cdots$ 的集合构成一个布尔代数.

我们必须证明，集合 $A, B, C, \cdots$ 所满足的公理 2.01—2.04，集合 $a, b, c, \cdots$ 亦能全部满足.

我们有
$$A \cup B \to a \cup b, \quad B \cup A \to b \cup a,$$

及

$$A \cup B = B \cup A,$$

因此

$$a \cup b = b \cup a.$$

同理，由

$$A \cap B \to a \cap b, \quad B \cap A \to b \cap a,$$

及

$$A \cap B = B \cap A,$$

就有

$$a \cap b = b \cap a.$$

对于分配律我们有

$$A \cup (B \cap C) \to a \cup (b \cap c),$$
$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \to (a \cup b) \cap (a \cup c),$$

于是由

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

得

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c).$$

第二分配律的证明可以简单地由调换 $\cup$ 及 $\cap$ 得到.

如果 0 是 $\mathbf{0}$ 的映象，1 是 $\mathbf{1}$ 的映象，则我们有

$$A \cup \mathbf{0} \to a \cup 0 \text{ 及 } A \to a,$$

因而由

$$A = A \cup \mathbf{0} \text{ 有 } a = a \cup 0.$$

同理由

$$A = A \cap \mathbf{1} \text{ 有 } a = a \cap 1.$$

最后，由

$$A \cup A' \to a \cup a', \quad \mathbf{1} \to 1$$

及

$$A \cup A' = \mathbf{1},$$

有

$$a \cup a' = 1.$$

又由

$$A \cap A' \to a \cap a', \quad \mathbf{0} \to 0,$$

及

$$A \cap A' = \mathbf{0},$$

有

$$a \cap a' = 0.$$

2.97. 若 $A \to A^*$ 是一个布尔代数到它自身之上的一个布尔同态(因此，对于代数的每个元素 A，A^* 是这个代数的一个元素)，$A \to \overline{A}$ 是代数到它自身之上的另一个布尔同态，则映射

$$A \to \overline{A^*}.$$

是一个布尔同态。

因为

$$(A \cup B)^* = A^* \cup B^*,$$

所以

$$\overline{(A \cup B)^*} = \overline{A^* \cup B^*} = \overline{A^*} \cup \overline{B^*}.$$

同理

$$\overline{(A \cap B)^*} = \overline{A^*} \cap \overline{B^*}.$$

对于补，我们有

$$(A')^* = (A^*)',$$

因此

$$\overline{(A')^*} = \overline{(A^*)'} = \overline{A^*}'.$$

证毕。

习　题　II

1. 证明下列关系：

(1) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B)$;

(2) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup D) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D)$;

(3) $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (B \cap D) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D)$;

(4) $(A \cup B \cup D) \cap (A' \cup C \cup E) = [(A \cup B) \cap (A' \cup C)] \cup [(A \cup D) \cap (A' \cup E)]$;

(5) $A + B = (A \cap B') + (A' \cap B)$;

(6) $(A + B) \cup (B + C) = (A + C) \cup (B + C)$;

(7) $A \cup (A + B) = A \cup B$;

(8) $A + (A \cup B) = B - A$;

(9) $A \cup B = A + [B - (A \cap B)]$;

(10) $A + C \subset (A + B) \cup (B + C)$;

(11) $(A \cup B) \cap (A' \cup C) = (A' \cap B) \cup (A \cap C)$.

2. 应用 2.74 节的判定法建立习题 I 的 12 和 13 中的各关系.

3. 将下列各式变换成两种标准形式:

$$(A \cup B)' \cap A \cap B,$$
$$(A \cup B \cup C)' \cap (A \cup B),$$
$$(A' \cap B)' \cap (C \cup B')' \cap (C \cup A').$$

4. 证明对于一个固定的 K, 映射 $A \to A + K$ 是一个保持补的同构映射.

5. 证明映射 $(A, B) \to B'$ 是一个布尔同态.

6. 设 $\{A\}$ 与 $\{a\}$ 是对于补、并、交封闭的两个集合, 对应 $A \longleftrightarrow a$ 是 $\{A\}$ 与 $\{a\}$ 之间的同构. 如果其中一个集合是布尔代数,则另一个也是布尔代数.

7. 设对应 $A \to a$ 是集合 $\{A\}$ 到集合 $\{a\}$ 上的一个同态，这两个集合对于补、并及交都是封闭的，证明如果集合 $\{A\}$ 是布尔代数，则集合 $\{a\}$ 也是布尔代数。

8. 证明在偏同态中，映射到同一元素上的元素的集合对于并及交是封闭的。

9. 如果映射 $A \to A^*$ 及 $A \to \bar{A}$ 都是一个集合到它自身上的偏同态，证明下列映射

$$A \to A^* \cup \bar{A}, \quad A \to A^* \cap \bar{A}$$

保持包含关系。

10. N 是 n 个不同的质数 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ 的乘积，$a, b, c, \cdots$ 是 N 的各个约数(包括数 1)；$a \cup b$ 表示 a, b 的最小公倍数，$a \cap b$ 表示它们的最大公约数。如果取数 1 为零元素 0，取数 N 为单位元素 1，且设 $a' = N/a$，证明 $a, b, c, \cdots$ 满足 2.01—2.04 全部关系。

11. 若 $\quad C \cup A = B, \quad C \cap A = 0,$

且

$$D \cup A = B, \quad D \cap A = 0,$$

证明

$$B \cap A = A, \quad B \cap C = C,$$

且

$$C = D.$$

12. 证明若 $A \cap B = A$，则联立方程

$$\begin{cases} X \cup A = B, \\ X \cap A = 0, \end{cases}$$

有唯一解

$$X = A' \cap B.$$

13. 证明联立方程

$$\begin{cases} X \cap (A \cup B) = X, \\ A \cap (B \cup X) = A, \\ B \cap (A \cup X) = B, \\ X \cap A \cap B = 0, \end{cases}$$

有唯一解

$$X = A + B.$$

第三章 布尔方程

3.0. 一个双运算的公理系统

有很多关于布尔代数的公理系统．本章中我们考虑一个具有两种运算 $A \cap B$ 及 A' 的公理系统，这两种运算我们仍称为交与补．公理是

3.01. $$A \cap B = B \cap A.$$

3.02. $$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

3.03. 若对于某些 A, B, C,

$$A \cap B' = C \cap C',$$

则

$$A \cap B = A.$$

3.04. 若

$$A \cap B = A,$$

则对于任意的 C 有

$$A \cap B' = C \cap C'.$$

同上一章的公理系统一样，我们需要公理能够保证在作交、补运算时等式仍保持成立，因此我们增添公理:

3.05. 若 $A = B$，则 $A' = B'$，而且 $A \cap C = B \cap C$.

3.1. 两种形式体系化的等价性

我们首先注意，这些公理的每一个都是前章系统中关于交和补的一个公理或一个可以证明的性质，因此我们由这些

公理所导出的任何性质一定可以由前面的公理系统中来证明．现在要证明的是，每一个可由公理 2.01—2.04 导出的性质也可由公理3.01—3.04 导出，证明这个事实的最简单的方法是证明公理2.01—2.04 本身可由 3.01—3.04 推得．

3.11. 并与 0,1　为此我们首先通过如下方程用交来定义并:

3.111. $$A \cup B = (A' \cap B')'.$$

（注意：这是前章的一个可证明的性质，这里则用作定义．）

3.112. 用方程

$$0 = A \cap A', \quad 1 = 0'$$

来定义 0 和 1.

（在最初 A 表示一个确定的元素，但如我们即将证明的，对于任何 A 都有此关系．）

3.12. 包含关系　对于包含关系，我们仍保持第二章定义，即当且仅当 $A \cap B = A$ 时，我们记为 $A \subset B$.

3.121. 由方程

$$A \cap A' = A \cap A'$$

及 3.03 有

$$A \cap A = A.$$

所以，由 3.04 可知对于任意的 C 都有

$$A \cap A' = C \cap C'.$$

即

3.122. 对于任何 C 有

$$C \cap C' = 0$$

这就证明了 2.04 的第二部分.

由 3.03 及 3.04 可得，当且仅当 $A \cap B' = 0$ 时，

$$A \cap B = A,$$

因此 $A \subset B$ 等价于 $A \cap B' = 0$. 特别地有

$$A \subset A.$$

为了证明包含关系是可传递的，我们注意，由

$$A \cap B = A \text{ 及 } B \cap C = B$$

得到

$$A \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (\text{由 } 3.02)$$
$$= A \cap B = A,$$

因此有

3.123. 由 $A \subset B$ 及 $B \subset C$ 有 $A \subset C$.

由 $A \cap A = A$ 及 3.01 我们又导出

3.124. $$A \cap B \subset A.$$

又由交换律我们有

如果 $A \subset B$ 及 $B \subset A$，则

$$A = A \cap B = B \cap A = B.$$

即

3.125. 如果 $A \subset B$ 及 $B \subset A$，则 $A = B$.

当然，如果 $A = B$，则 $A = A \cap A = B \cap A = A \cap B$，因而 $A \subset B$；同理，由 $B = A$ 有 $B \subset A$.

为了证明 $A \cap 0 = 0$，我们观察 $0 = A \cap A'$ 及 $A \cap A' \subset A$（由 3.124），所以有

3.126. $$0 \subset A.$$

从而有

3.127. $$A \cap 0 = 0 \cap A = 0.$$

下一步是证明

3.13. 对合性 $A'' = A$.

由于 $A'' \cap A' = A' \cap A'' = 0$，故 $A'' \subset A$；因此又有 $A''' \subset A'$ 及 $A'''' \subset A''$（在 $A'' \subset A$ 中先取 A'、后取 A'' 代替 A），因此由包含关系的可传递性有

$$A'''' \subset A,$$

因此

$$A'''' \cap A' = 0,$$

由此我们推出

$$A' \subset A''';$$

由于我们已证明过 $A''' \subset A'$，我们就有

$$A''' = A';$$

由此及 $A \cap A' = 0$ 有

$$A \cap A''' = 0,$$

因而

$$A \subset A'',$$

故

$$A = A''. \qquad (\text{前面已证 } A'' \subset A)$$

3.14. 包含关系的等价性 现在可以证明 $A \subset B$ 和 $B' \subset A'$ 的等价性. 因为由 $A \subset B$ 我们有 $A \cap B' = 0$，从而 $B' \cap A'' = 0$，即 $B' \subset A'$. 反之，由 $B' \subset A'$ 有 $A'' \subset B''$，从而 $A \subset B$.

由此还有

3.141. $$A \subset A \cup B,$$

因为这等价于 $(A \cup B)' \subset A'$，即 $A' \cap B' \subset A'$，而这是我们已经证明过了的.

由 3.14 我们容易证明

3.142. 当且仅当 $A \cup B = B$ 时，$A \subset B$.

因为 $A \cup B = B$ 等价于 $(A' \cap B')' = B$，而这依次等价于 $A' \cap B' = B'$，$B' \subset A'$，$A \subset B$.

3.15. 并的交换律与结合律 并的交换律是公理 3.01 的直接推论，因为

$$A \cup B = (A' \cap B')' = (B' \cap A')' = B \cup A.$$

这就证明了 2.01 的第一部分.

为了证明并的结合律，我们有

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= A \cup (B' \cap C')' \\ &= [A' \cap (B' \cap C')]' \\ &= [(A' \cap B') \cap C']' \quad (\text{由公理 } 3.02) \\ &= (A' \cap B')' \cup C \\ &= (A \cup B) \cup C. \end{aligned}$$

3.151. 由 3.121，用 A' 代替 A，我们有

$$A' \cap A' = A',$$

由此取补得

$$A \cup A = A.$$

3.152. 由 3.13 及 0 与 1 的定义我们有

$$A \cup A' = 1,$$

这是因为 $A \cup A' = (A' \cap A)' = 0' = 1$. 这就证明了 2.04 的第一部分.

3.153. 若 $A \subset B$，则 $A \cap C \subset B \cap C$ 及 $A \cup C \subset B \cup C$. 这是因为，若 $A \subset B$，则 $A \cap B = A$，因此

$$A \cap B \cap C = A \cap C,$$

而

$$\begin{aligned} (A \cap C) \cap (B \cap C) &= ((A \cap C) \cap C) \cap B \\ &= A \cap (C \cap C) \cap B \\ &= A \cap B \cap C = A \cap C, \end{aligned}$$

这就证明了

$$A \cap C \subset B \cap C.$$

同理

$$(A \cup C) \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C,$$

若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B$，因此

$$A \cup B \cup C = B \cup C,$$

故

$$(A \cup C) \cup (B \cup C) = B \cup C,$$

这就证明了

$$A \cup C \subset B \cup C.$$

3.154. 一个直接推论是：由 $A \subset B$ 及 $C \subset D$ 得到

$$A \cup C \subset B \cup D.$$

这是因为 $A \cup C \subset B \cup C \subset B \cup D$. 特别地，由 $A \subset B$, $C \subset B$ 得到 $A \cup C \subset B$. 这是因为 $B \cup B = B$.

3.16. 并与交的分配律 下面证明并与交的分配律，我们由特殊情况开始。

3.161. $$A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B).$$

由 3.141 $$A \subset A \cup B,$$

因此

$$A \cap (A \cup B) = A;$$

但是 $A \cap B \subset A$, 所以

3.162. $$(A \cap B) \cup A = A.$$

这就证明了

$$A \cap (A \cup B) = (A \cap B) \cup A.$$

因为

$$A \cap (A' \cup B) \cap B' = A \cap (A \cap B')' \cap B'$$
$$= (A \cap B') \cap (A \cap B')' = 0,$$

由公理 3.03，有

$$A \cap (A' \cup B) = A \cap (A' \cup B) \cap B.$$

但是由 $B \subset B \cup A' = A' \cup B$, 我们已经看到

$$(A' \cup B) \cap B = B,$$

因此有

3.163. $$A \cap (A' \cup B) = A \cap B.$$

由已证的关系

$$B \subset B \cup C,$$

$$C \subset B \cup C.$$

可得（由 3.153）

$$A \cap B \subset A \cap (B \cup C),$$
$$A \cap C \subset A \cap (B \cup C),$$

从而有（由 3.154）

3.164. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C).$

更进一步有

$$\begin{aligned} & A \cap (B \cup C) \cap [(A \cap B) \cup (A \cap C)]' \\ & = A \cap (B \cup C) \cap [(A' \cup B') \cap (A' \cup C')] \\ & = (B \cup C) \cap A \cap B' \cap (A' \cup C') \quad \text{(由 3.163)} \\ & = (B \cup C) \cap B' \cap A \cap C' \quad \text{(由 3.163)} \\ & = (B \cup C) \cap (B \cup C)' \cap A \\ & = 0 \cap A = 0. \quad \text{(由 3.127)} \end{aligned}$$

这就证明了

3.165. $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$

把 3.164 与 3.165 合起来就证明了第二分配律（2.02 下式）：

3.166. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

用 A', B', C' 代替 3.166 的 A, B, C 并在两边取补，我们就得到了第一分配律（2.02 上式）：

3.167. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

3.17. 由 3.162 我们容易证明 2.03 的两个部分．因为

$$A \cup 0 = A \cup (A \cap A') = A,$$

因此

$$A' \cup 1' = A',$$

由此取补得

$$A \cap 1 = A.$$

我们已经完成了由公理 3.01—3.04 到公理 2.01—2.04 的所有关系的推导工作，这就表明了这两组公理有着相同的结

果，因而是等价的．在习题和下一章中，我们还要进一步考虑布尔代数的另一些等价公理系统．

3.2. 布尔方程

我们已在1.971看到，如果A是一个已给定的元素，X是一个未知元素，方程

$$A + X = 0$$

有唯一解$X = A$，因此方程

$$(A + X) \cup (B + Y) = 0$$

有解$X = A$及$Y = B$，这结论显然可以推广到更多项的情形上去．

同理，方程

$$A \times X = 1$$

有唯一解$X = A$（见1.98），因而方程

$$(A \times X) \cap (B \times Y) = 1$$

有解$X = A$及$Y = B$（显然这个结论也可以推广到三项或更多项的情形上去）．

3.21. 方程

$$A \cup X = 1$$

有一般解$X = A' \cup U$，其中U是一个任意元素；而所谓一般解系指X的值满足方程，且对于U的一个适当的值，每个解具有形式$A' \cup U$．

首先我们注意，如果$X = A' \cup U$，则$A \cup X = A \cup A' \cup U = 1 \cup U = 1$．而且，若$A \cup X = 1$，则$A' \cap X' = 0$，因此

$$X \cup (A' \cap X') = X \cup 0 = X,$$

因而

$$(X \cup A') \cap (X \cup X') = X,$$

故

$$X = A' \cup X.$$

这表明每个解具有形式 $A' \cup U$（这时 U 取值 X）.

由此即可得到

3.22. 方程

$$(A \cup X) \cap (B \cup Y) \cap (C \cup Z) = 1$$

有解

$$X = A' \cup U, \quad Y = B' \cup V, \quad Z = C' \cup W,$$

其中 U, V, W 是任意的.

3.23. 方程

$$X \cup (A \cap Y) = K$$

有一般解

$$X = [U \cup (A' \cup V')] \cap K,$$
$$Y = (A' \cup K) \cap V.$$

我们先来证明 X 和 Y 的这些值确实满足方程；事实上，

$$A \cap Y = A \cap (A' \cup K) \cap V$$
$$= A \cap K \cap V,$$

因此

$$X \cup (A \cap Y) = K \cap [(A \cap V) \cup U \cup (A' \cup V')]$$
$$= K \cap [U \cup (A \cap V) \cup (A \cap V)']$$
$$= K \cap 1 = K.$$

反之，若 $X \cup (A \cap Y) = K$，则 $A \cap Y \subset K$，因而

$$Y \subset Y \cup A' = (A \cap Y) \cup A' \subset K \cup A',$$

因此

$$Y = (K \cup A') \cap Y,$$

这证明 $Y = (K \cup A') \cap V$，其中 V 的值为 Y.

更进一步，因为

$$X' \cap (A' \cup Y') = K',$$

故有

$$X \cup [X' \cap (A' \cup Y')] = X \cup K',$$

因此

$$X \cup A' \cup Y' = X \cup K',$$

从而

$$K \cap (X \cup A' \cup Y') = K \cap X;$$

但因 $X \cup (A \cap Y) = K$，因此 $X \subset K$，从而 $K \cap X = X$，这就证明了

$$X = [U \cup (A' \cup Y')] \cap K,$$

其中 U 取值 X.

3.24. 方程

$$X \cup Y = K$$

当然是前方程在 $A = 1$ 时的特殊情况，但用 $A = 1$ 代入所得的解的形式关于 X 和 Y 是不对称的，我们将证明一般解可以表成以下形式:

$$X = K \cap (U \cup V'),$$
$$Y = K \cap (U' \cup V),$$

这里 U, V 是任意的. 这是因为 X, Y 取这些值时,

$$\begin{aligned} X \cup Y &= [K \cap (U \cup V')] \cup [K \cap (U' \cup V)] \\ &= K \cap [U \cup V' \cup U' \cup V] = K \cap 1 = K. \end{aligned}$$

反之，若 X, Y 满足 $X \cup Y = K$，则

$$\begin{aligned} X &= X \cup (Y \cap Y') = (X \cup Y) \cap (X \cup Y') \\ &= K \cap (X \cup Y'), \\ Y &= Y \cup (X \cap X') = (X \cup Y) \cap (X' \cup Y) \\ &= K \cap (X' \cup Y); \end{aligned}$$

因此

$$X = K \cap (U \cup V'), \quad Y = K \cap (U' \cup V),$$

这里 U, V 分别取值 X, Y.

现在我们考虑方程 3.23 的推广:

3.25. $$X \cup (A \cap Y) \cup (B \cap Z) = K.$$

它的一般解是

$$X = K \cap \{U \cup [(A' \cup V') \cap (B' \cup W')]\},$$

$$Y = (K \cup A') \cap V,$$

$$Z = (K \cup B') \cap W.$$

我们首先注意这些值满足方程

$$A \cap Y = V \cap A \cap K, \qquad (\text{由 } 3.163)$$

$$B \cap Z = W \cap B \cap K. \qquad (\text{由 } 3.163)$$

因而

$$\begin{aligned} X \cup (A \cap Y) \cup (B \cap Z) &= K \cap \{U \cup [(A' \cup V') \cap (B' \cup W')] \\ &\quad \cup (V \cap A) \cup (W \cap B)\} \\ &= K \cap \{U \cup [(A \cap V) \cup (B \cap W)]' \\ &\quad \cup (V \cap A) \cup (B \cap W)\} \\ &= K \cap 1 = K. \end{aligned}$$

现在考虑已给方程的任意解 $X = X_1$, $Y = Y_1$, $Z = Z_1$, 则有

$$X_1 \cup (A \cap Y_1) \cup (B \cap Z_1) = K,$$

因此 $A \cap Y_1 \subset K$, $B \cap Z_1 \subset K$, 从而

$$Y_1 \subset Y_1 \cup A' = (A \cap Y_1) \cup A' \subset K \cup A',$$

故

$$Y_1 = (K \cup A') \cap Y_1;$$

同理

$$Z_1 = (K \cup B') \cap Z_1.$$

这就证明了

$$Y_1 = (K \cup A') \cap V, \quad Z_1 = (K \cup B') \cap W,$$

这里 V 取值 Y_1, 而 W 取值 Z_1.

在 X_1, Y_1, Z_1 所满足的方程上取补，我们发现

$$X_1' \cap (A' \cup Y_1') \cap (B' \cup Z_1') = K',$$

因此

$$X_1 \cup [(A' \cup Y_1') \cap (B' \cup Z_1')] = X_1 \cup K',$$

从而

$$K \cap \{X_1 \cup [(A' \cup Y_1') \cap (B' \cup Z_1')]\} = K \cap X_1,$$

由于 $X_1 \subset K$, 因此 $K \cap X_1 = X_1$, 从而

$$X_1 = K \cap \{X_1 \cup [(A' \cup Y_1') \cap (B' \cup Z_1')]\},$$

这就证明了

$$X_1 = K \cap \{U \cup [(A' \cup V') \cap (B' \cup W')]\},$$

其中 U 取值 X_1, V 取值 Y_1, W 取值 Z_1.

显然可以把这个解法推广到任意多个集合上去.

3.26. 方程

$$K \cap (A \cup X) = 0$$

等价于两个方程

$$K \cap A = 0,$$

$$K \cap X = 0;$$

若条件 $K \cap A = 0$ 被满足，则方程的一般解是

$$X = K' \cap U,$$

其中 U 是任意的. 因为如果 $X = K' \cap U$ (且 $K \cap A = 0$) 则

$$K \cap (A \cup X) = K \cap (A \cup (K' \cap U))$$
$$= (K \cap A) \cup (K \cap K' \cap U) = 0;$$

反之，如果 $K \cap X_1 = 0$, 则

$$K' \cup X_1' = 1.$$

因此

$$X_1 = X_1 \cap 1 = X_1 \cap (X_1' \cup K') = K' \cap X_1,$$

这就证明了 $X_1 = K' \cap U$, 其中 U 取值 X_1.

3.27. 两个未知元的方程

$$K\cap(A\cup X)\cap(B\cup Y)=0$$

的解可由 3.26 导出．因为 3.27 等价于两个方程：

3.271. $$K\cap B\cap(A\cup X)=0,$$

3.272. $$K\cap(A\cup X)\cap Y=0.$$

当且仅当

$$A\cap B\cap K=0$$

时，第一个方程有一个解；又如我们已经看到，若这条件被满足，则一般解为*

$$X=K'\cup B'\cap U,$$

其中 U 是任意的． 对于 X 的这个值来说，3.272 的一般解是

$$Y=[K\cap(A\cup X)]'\cap V,$$

此处 V 是任意的．用同样的方法，

3.28. 三个未知元的方程

$$K\cap(A\cup X)\cap(B\cup Y)\cap(C\cup Z)=0$$

的解可以马上写出．因为这个方程等价于

$$(K\cap C)\cap(A\cup X)\cap(B\cup Y)=0,$$

$$K\cap(A\cup X)\cap(B\cup Y)\cap Z=0;$$

当且仅当

$$A\cap B\cap C\cap K=0$$

时，第一个方程是可解的．当此条件被满足时，我们有一般解

$$X=(K\cap C)'\cup B'\cup U=[K'\cup B'\cup C']\cap U,$$

$$Y=[K\cap C\cap(A\cup X)]'\cap V,$$

$$Z=[K\cap(A\cup X)\cap(B\cup Y)]'\cap W,$$

其中 U，V，W 都是任意的．

显然，这个方法可以推广到任意多个未知元的方程上去．

---

* 在以下关于 X，Y，Z 的五个等式中原书均将最后一个 $\cap$ 误为 $\cup$．——译者注

3.29. 方程

$$(A \cap X) \cup (B \cap X') = 0$$

可解的充要条件是 $A \cap B = 0$，且若这条件能被满足时，则一般解是

$$X = (A' \cap U) \cup (B \cap U').$$

因为如果 $A \cap B = 0$ 且 $X = (A' \cap U) \cup (B \cap U')$，则

$$\begin{aligned} A \cap X &= A \cap B \cap U' = 0, \\ B \cap X' &= B \cap (A \cup U') \cap (B' \cup U) \\ &= (B \cap U') \cap (B' \cup U) \\ &= (B \cap U') \cap (B \cap U')' \\ &= 0, \end{aligned}$$

因此 3.29 能被满足． 反之，如果 X_1 是满足 3.29 的 X 的一个值，则

3.291. $$(A \cap X_1) \cup (B \cap X_1') = 0,$$

因此取补得

$$(A' \cup X_1') \cap (B' \cup X_1) = 1,$$

因此

$$\begin{aligned} A \cap B &= A \cap B \cap 1 \\ &= (A \cap B) \cap (A' \cup X_1') \cap (B' \cup X_1) \\ &= (A \cap B \cap X_1') \cap (B' \cup X_1) \\ &= A \cap B \cap X_1 \cap X_1' \\ &= 0, \end{aligned}$$

又由 3.291，

$$A \cap X_1 = 0, \quad B \cap X_1' = 0$$

故

$$X_1 = X_1 \cup 0 = X_1 \cup (X_1' \cap B) = B \cup X_1,$$

又

$$X_1 = X_1 \cap (A \cup A') = (A \cap X_1) \cup (A' \cap X_1) = A' \cap X_1$$

如果使U取值 $A' \cap B' \cap X_1$，我们就可以由此得到:

$$
\begin{aligned}
&(A' \cap U) \cup (B \cap U') \\
&\quad = (A' \cap B' \cap X_1) \cup [B \cap (A \cup B \cup X_1')] \\
&\quad = (A' \cap B' \cap X_1) \cup [B \cup (B \cap X_1')] \\
&\quad = (A' \cap B' \cap X_1) \cup B \\
&\quad = (B' \cap X_1) \cup B = X_1 \cup B = X_1,
\end{aligned}
$$

这就是我们所要证明的。

最后考察联立方程

3.292.
$$X \cup (Y \cap Z) = 1,$$
$$Y \cup (Z \cap X) = 1.$$

第一个方程等价于下列一对方程:

$$X \cup Y = 1, \quad X \cup Z = 1,$$

第二个方程则等价于

$$Y \cup Z = 1, \quad Y \cup X = 1.$$

因而所给的两个方程等价于三个方程

$$X \cup Y = 1, \ Y \cup Z = 1, \ Z \cup X = 1.$$

这组方程的一般解是

$$X = U \cup V', \ Y = V \cup W', \ Z = W \cup U';$$

因为如果 X, Y, Z 取这些值，则

$$
\begin{aligned}
X \cup Y &= U \cup V' \cup V \cup W' = 1, \\
Y \cup Z &= V \cup W' \cup W \cup U' = 1, \\
Z \cup X &= W \cup U' \cup U \cup V' = 1.
\end{aligned}
$$

反之，如果 X_1, Y_1, Z_1 满足方程 3.292，则

$$
\begin{aligned}
&X_1 = X_1 \cup (Y_1 \cap Y_1') = 1 \cap (X_1 \cup Y_1') = X_1 \cup Y_1', \\
&Y_1 = Y_1 \cup Z_1', \\
&Z_1 = Z_1 \cup X_1',
\end{aligned}
$$

令 U, V, W 分别取值 X_1, Y_1, Z_1，则这表示

$$X_1 = U \cup V', \ Y_1 = V \cup W', \ Z_1 = W \cup U'.$$

3.3. 合 同 关 系

设 ρ 是一个布尔代数的元素之间的一个关系，即一个对于某些元素对成立，而对其它一些元素对也许不成立的关系。如果两个元素 A,B 之间存在关系 ρ，我们就记作 $A\rho B$；如果 A,B 之间没有这个关系，则我们记作 $A\not\rho B$。举例来说，包含 $\subset$，相等 $=$，互补等都是布尔代数的元素之间的关系。

3.30. 等价关系 一个关系 ρ 称为**等价关系**，如果它有下列三种性质：

3.301. E_1：对于所有元素 A 都有 $A\rho A$，

3.302. E_2：若 $A\rho B$，则 $B\rho A$，

3.303. E_3：若 $A\rho B$ 且 $B\rho C$，则 $A\rho C$。

具有性质 E_1 的关系称为**反射的**；具有性质 E_2 的关系称为**对称的**；具有性质 E_3 的关系称为**可传递的**。例如包含关系是反射的和可传递的，但不是对称的；"互补"关系是对称的，因为由 $A=B'$ 有 $B=A'$，但不是反射的或可传递的。

一个等价关系 ρ 称为**合同关系**，如果 ρ 除具有等价性质 E_1，E_2，E_3 外，尚有性质

3.31. C_1：若 $A\rho B$，则对于一切 C 都有

$$(A\cap C)\rho(B\cap C),$$

3.32. C_2：若 $A\rho B$，则 $A'\rho B'$。

若 ρ 是合同关系，而且 $A\rho B$，则称 A，B 是**合同的**。

3.33. 合同关系把元素的集合分成没有公共成员的子集合。因为若设 $\{A\}$ 表示合同于 A 的元素的集合，并假设 $\{A\}$ 与 $\{B\}$ 有一个公共的成员。若 C 是这个公共的成员，则 A 合同于 C，且 C 合同于 B，（由 E_3）故 A 合同于 B，因此合同于 $\{B\}$ 的任意成员，这就证明了 $\{B\}\subset\{A\}$；同理，$\{A\}\subset\{B\}$；

因此 $\{A\}=\{B\}$. 这样，或者 $\{A\}$ 与 $\{B\}$ 没有公共元素，或者它们相互重合。

3.34. 我们来定义一个以 $\{A\}, \{B\}, \cdots$ 为元素的布尔代数。我们首先注意，若 $C\in\{A\}$ 且 $D\in\{B\}$，则

$$(C\cap D)\in\{A\cap B\};$$

因为根据 C_1，由 $C\rho A$ 有 $(C\cap D)\rho(A\cap D)$，又由 $D\rho B$ 有 $(A\cap D)\rho(A\cap B)$，从而由 E_3 有 $(C\cap D)\in\{A\cap B\}$. 同理，若 $C\in\{A\}$，则 $C\rho A$，因而 $C'\rho A'$，所以 $C'\in\{A'\}$.

我们定义

$$\{A\}\cap\{B\}=\{A\cap B\}$$

及

$$\{A\}'=\{A'\};$$

由于以上的证明，集合 $\{A\cap B\}$ 与集合 $\{C\cap D\}$ 重合，此处 C, D 分别是 $\{A\}$ 和 $\{B\}$ 的任意成员；又集合 $\{A'\}$ 与集合 $\{C'\}$ 重合，此处 C 是 $\{A\}$ 的任意成员，因此前面的交和补的定义就与定义中集合 $\{A\}$ 及集合 $\{B\}$ 的代表的选择无关了。

3.341. 为了证明我们所定义的元素集合构成一个布尔代数，我们必须证明公理能被满足。

对于交换律我们有

$$\{A\}\cap\{B\}=\{A\cap B\}=\{B\cap A\}=\{B\}\cap\{A\};$$

而对于结合律有

$$\{A\}\cap(\{B\}\cap\{C\})=\{A\}\cap\{B\cap C\}$$
$$=\{A\cap B\cap C\},$$
$$(\{A\}\cap\{B\})\cap\{C\}=\{A\cap B\}\cap\{C\}$$
$$=\{A\cap B\cap C\}.$$

若对于某个 C，

$$\{A\}\cap\{B\}'=\{C\}\cap\{C\}',$$

则

$$\{A \cap B'\} = \{C \cap C'\} = \{0\},$$

因而 $A \cap B'$ 合同于 0，由此取补就有：

$$A' \cup B \text{ 合同于 } 1,$$

因此 $(A' \cup B) \cap A$ 合同于 $1 \cap A$，从而

$$A \cap B \text{ 合同于 } A,$$

故

$$\{A \cap B\} = \{A\},$$

由此我们得到所需要的结论

$$\{A\} \cap \{B\} = \{A\}.$$

反之，若

$$\{A\} \cap \{B\} = \{A\},$$

则

$$\{A \cap B\} = \{A\},$$

即 A 合同于 $A \cap B$. 因而 $A \cap B'$ 合同于

$$A \cap B \cap B' = A \cap 0 = 0 = C \cap C',$$

即

$$\{A \cap B'\} = \{C \cap C'\},$$

故

$$\{A\} \cap \{B\}' = \{C\} \cap \{C\}'.$$

证毕.

3.35. 由 A 到 $\{A\}$ 上的映射是一个同态，因为

$$A \cap B \to \{A \cap B\} = \{A\} \cap \{B\},$$

且

$$A' \to \{A'\} = \{A\}'.$$

3.36. 反之，一个布尔代数 $\mathscr{A}$ 到一个布尔代数 $\mathscr{A}^*$ 上的同态确定 $\mathscr{A}$ 的元素之间的一个合同关系；我们根据如下条件来定义这个关系 ρ：对于 $\mathscr{A}$ 的任意两个元素 A、B，当且仅当 A 及 B 映射到 $\mathscr{A}^*$ 的同一元素上时 $A\rho B$. 现在证明 ρ 是

一个合同关系．当然 ρ 是一个等价关系；尚须证明的仅仅是，若 A, B 映射到 $\mathscr{A}^*$ 的同一元素上，则对于任何 C，$A \cap C$ 和 $B \cap C$ 也映射到 $\mathscr{A}^*$ 的同一元素上，而且 A' 和 B' 也映射到 $\mathscr{A}^*$ 的同一元素上．

令 A^* 是 A 在 $\mathscr{A}^*$ 内的映象，C^* 是 C 在 $\mathscr{A}^*$ 内的映象，则

$$A \cap C \to A^* \cap C^*, \quad B \cap C \to A^* \cap C^*,$$

因此

$$(A \cap C)\rho(B \cap C),$$

而且

$$A' \to A^{*\prime}, \quad B' \to A^{*\prime},$$

因此

$$A'\rho B'.$$

这就证明了关系 ρ 是一个合同关系*．

3.37. 如果 $\{A\}$ 是映射到 $\mathscr{A}^*$ 的同一元素 A^* 上的元素 A 的集合（因此 $\{A\}$ 是与 A 有关系 ρ 的元素的集合），则 $\{A\}$ 与 A^* 之间的关系是一个同构．这是因为 A^* 作为集合 $\{A\}$ 的任何成员的映象是唯一确定的，反之，对于给定的 A^*，集合 $\{A\}$ 作为 $\mathscr{A}$ 的映射到 A^* 上的所有元素的集合，也是唯一确定的，而且

$$\{A\} \cap \{B\} = \{A \cap B\} \longleftrightarrow A^* \cap B^*,$$
$$\{A\}' = \{A'\} \longleftrightarrow A^{*\prime}.$$

3.38. 如果 $\mathscr{A}$ 到布尔代数 $\mathscr{A}^*$ 上有一同态，$\{U\}$，$\{V\}$ 分别是 $\mathscr{A}$ 的元素的集合，其中 U 由 $\mathscr{A}$ 的所有映射到 $\mathscr{A}^*$ 中的零 0^* 上的元素所构成，而 V 则由 $\mathscr{A}$ 的所有映射到 $\mathscr{A}^*$ 中的单位 1^* 上的元素所构成，则 $\{U\}$，$\{V\}$ 分别包含 $\mathscr{A}$ 的零

* 原书误为等价关系．——译者注

0及单位 1.

因为，$V = V \cap 1$，因此如果 E^* 是 1 的映象，则

$$V \cap 1 \to 1^* \cap E^*, \quad V \to 1^*,$$

因此

$$E^* = 1^* \cap E^* = 1^*,$$

这就证明了 1 被映射到 1^* 上.

由此得

$$1' \to 1^{*\prime},$$

即

$$0 \to 0^*.$$

3.39. 若在 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{A}^*$ 上的同态映射中，$\{U\}$，$\{V\}$ 分别是由 $\mathscr{A}$ 中所有映射到 $\mathscr{A}^*$ 的零 0^* 和单位 1^* 的元素所构成的集合，且设 A 映射到 A^* 上，则集合 $\{A\}$ 是由 A 和 $\{U\}$ 中的任一成员取对称差所得的元素的集合，同样也是由取 A 和 $\{V\}$ 中任一成员的叉而得到的元素的集合.

我们首先注意若 $A \to A^*$ 且 $B \to B^*$，则

$$A + B \to A^* + B^*,$$

$$A \times B \to A^* \times B^*.$$

这是因为

$$A + B = (A \cup B) \cap (A' \cup B')$$
$$\to (A^* \cup B^*) \cap (A^{*\prime} \cup B^{*\prime}) = A^* + B^*;$$

从而

$$A \times B \to A^* \times B^*.$$

若 K 是 $\{U\}$ 的任一成员，则 K 映射到 0^* 上，因而

$$A + K \to A^* + 0^* = A^*,$$

故 $A + K$ 属于 $\{A\}$；反之，若 B 是集合 $\{A\}$ 的任一成员，则因为

$$B = (A + A) + B = A + (A + B)$$

和

$$A + B \to A^* + A^* = 0^*,$$

因此 $A + B$ 属于 $\{U\}$，从而 B 是 A 及 $\{U\}$ 的一个成员的对称差。

同样地，若 L 是 $\{V\}$ 的任一元素，则 L 映射到 1^* 上，因而

$$A \times L \to A^* \times 1^* = A^*,$$

故 $A \times L$ 属于 A；反之，若 B 是 $\{A\}$ 的任一成员，则因为

$$B = (A \times A) \times B = A \times (A \times B)$$

及

$$A \times B \to A^* \times A^* = 1^*,$$

因此 $A \times B$ 属于 $\{V\}$，且 B 是 A 和 $\{V\}$ 的一个成员的叉。

3.4. 公理的独立性

我们证明公理 3.01, 3.02, 3.03, 3.04 的独立性来结束本章. 前三公理的独立性的证明是容易的，但第四公理的独立性则相当难证.

3.41. 为了证明公理 3.01 的独立性，我们考虑三个元素 0, 1, a 的一个代数，并且交和补的关系由下表定义：

$\cap$	0	1	a
0	0	0	0
1	0	1	1
a	0	a	a

$$0' = 1$$
$$1' = 0$$
$$a' = 0$$

因为 $1 \cap a = 1$，但 $a \cap 1 = a$，可知 3.01 不成立. 3.02 的验证需要检验 27 个如下的等式：

$$0 \cap (1 \cap a) = (0 \cap 1) \cap a,$$

我们把它们的验证略去了.

对于任意元素 x (x 是 0, 1 或 a), 我们可以看到,

$$x \cap x' = 0,$$

而且仅当 x 和 y 之中有一个是 0 时,

$$x \cap y = 0.$$

因此若 $x \cap y' = 0$ 时, 我们有 $x = 0$ 或 $y = 1, a$; 若 $x = 0$, 则 $x \cap y = x$; 若 $y = 1$, 则 $x \cap 1 = x$; 若 $y = a$, 则 $x \cap a = x$, 这就证明了 3.03 成立. 此外, 若 $x \cap y = x$, 则或是 $x = 0$, 在这种情况下 $x \cap y' = 0$; 或是 $x = 1$, $y = 1$ 或 a, 因而 $y' = 0$ 且 $x \cap y' = 0$; 或是 $x = a$, $y = 1$ 或 a, 此时仍有 $y' = 0$, 这就证明了 3.04 成立.

3.42. 同法根据表

$\cap$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

$a' = a$
$b' = c$
$c' = b$

我们可以证明 3.02 的独立性. 我们首先注意上表是对称的, 因而 3.01 成立. 但是

$$a \cap (b \cap c) = a \cap a = a,$$
$$(a \cap b) \cap c = c \cap c = c,$$

这表明 3.02 被破坏了. 我们有

$$a \cap b = c, \quad a \cap c = b, \quad b \cap c = a,$$

又

$$a \cap a = a, \quad b \cap b = b, \quad c \cap c = c,$$

而且

$$a \cap a' = b \cap b' = c \cap c' = a,$$

由此容易证明 3.03 及 3.04 成立.

3.43. 对于公理 3.03，我们使用表

$\cap$	0	1
0	0	0
1	0	1

$0' = 0$

$1' = 0$

因为对于交的表只不过是一个乘法表，所以 3.01，3.02 显然成立．显然 $0 \cap 0' = 1 \cap 1' = 0$．此外，如果 $x = 0$ 或 $x = y = 1$，则 $x \cap y = x$，而在这些情况下都有 $x \cap y' = 0$，这就证明 3.04 成立．但 3.03 却不成立，因为

$$1 \cap 0' = 0 \cap 0',$$

但是

$$1 \cap 0 = 0.$$

3.44. 为了证明第四公理的独立性，我们考虑数集合的一个代数．我们用 $[a]$ 表示大于或者等于 a 的一切数* a，$a + 1$，$a + 2, \cdots$的集合．在所作的代数中，每个集合 A 是一个集合$[a]$及一个小于 $a - 1$ 的数的有限集合 $\sigma(A)$ 的并（若 $a = 1$ 或2时，则 $\sigma(A)$ 为零）．我们取全体这样的集合作为此代数的元素．其单位是一切数 1，2，3，$\cdots$的集合，而零则是空集合**．我们用 $\tau(A)$ 表示小于或等于 $a - 1$ 但不是 $\sigma(A)$ 的成员的数的集合，又定义 A 的补集为 $\tau(A) \cup [a + 1]$．例如，若 $A = 1, 3, 6, 7, 8, \cdots$ 则 $\sigma(A) = 1, 3$；$\tau(A) = 2, 4, 5$；$A' = 2, 4, 5, 7, 8, 9, \cdots$．两个元素 A 和 B 的交集仍指集合 A，B 的公共部分，这当然是同一组集合的一个成员．例如

$$A = 1, 3, 6, 7, 8, 9, \cdots,$$

$$B = 3, 5, 6, 11, 12, 13, \cdots,$$

---

* 本段中所说的数均指自然数而言．——译者注

** 在验证 3.0 中各公理的独立性时，并没有必要考虑单位及零．——译者注

则

$$A \cap B = 3, 6, 11, 12, 13, \cdots,$$

显然,因为

$$A = \sigma(A) \cup [a]$$

及

$$B = \sigma(B) \cup [b],$$

我们有

$$A \cap B = \{\sigma(A) \cap \sigma(B)\} \cup \{\sigma(A) \cap [b]\}$$
$$\cup \{\sigma(B) \cap [a]\} \cup \{[a] \cap [b]\},$$

因为 $\sigma(A)$ 和 $\sigma(B)$ 都是有限集合,因此

$$\sigma(A) \cap \sigma(B),\ \sigma(A) \cap [b],\ \sigma(B) \cap [a]$$

也是有限集合,它们的成员中没有一个是大于 $a-2$ 和 $b-2$ 中的较大者的;至于 $[a] \cap [b]$ 则由大于或等于 a 与 b 中较大者的一切数所组成,这就证明 $A \cap B$ 是这个代数的一个元素.

因为交恰是集合交,公理 3.01, 3.02 自然能被满足. 下面的例子

$$A = 1, 4, 5, 6, \cdots, \qquad B = 1, 2, 4, 5, 6, \cdots,$$
$$A \cap B = A, \qquad B' = 3, 5, 6, \cdots$$
$$A \cap B' = 5, 6, 7, \cdots$$

及

$$C = 1, 3, 4, 5, 6, \cdots, \quad C' = 2, 4, 5, 6, \cdots$$
$$C \cap C' = 4, 5, 6, \cdots$$

表明公理 3.04 不成立(对于一切集合 C 来说, $C \cap C'$ 并不相同,这一事实足以表明 3.04 不成立).

还剩下证明公理 3.2 能被满足. 我们首先注意对于任何集合 $C = \sigma(C) \cup [c]$, 因为 $\sigma(C) \cap \tau(C) = 0$, $\sigma(C) \cap [c+1] = 0$ 且 $\tau(C) \cap [c] = 0$, 因此

$$C\cap C' = [c+1].$$

我们看在 a, b 之间必须存在什么关系才能使

$$A\cap B' = C\cap C'$$

成立，首先我们证明，如果 $a\geqslant b$，且对于某个 C 来说，有

$$A\cap B' = C\cap C',$$

则 $\sigma(A)\subset B$.

令 $A\cap B' = [c+1]$. 因为 B 不包含 b，而 $A\cap B'$ 是一列数 $x\geqslant c+1$，因此 $A\cap B'$ 不包含着小于 b 的数；于是若 $\sigma(A)$ 包含一个小于 b 的数，那末它必属于 $\sigma(B)$，这是因为它不在 B' 中*. 又因 A 不包含 $a-1$，因此 $A\cap B'$ 不包含 $a-1$，从而不包含任何小于 a 的数，因此 $\sigma(A)$ 的成员都不属于 B'，故 $\sigma(A)$ 中的每个数均属于 B. 于是若 $a\geqslant b$ 而且 $A\cap B' = C\cap C'$，则

$$\sigma(A)\subset B \text{ 而且 } [a]\subset[b]\subset B,$$

故

$$A = \sigma(A)\cup[a]\subset B,$$

从而

$$A\cap B = A$$

但若 $a<b$，则 $b-1$ 既属于 B' 又属于 A，因而属于 $A\cap B'$，然而 b 本身却不属于 $A\cap B'$，这就证明了 $A\cap B'$ 不是数列 $c, c+1, c+2,\cdots$，因此对于任何 C 来说，它不是 $C\cap C'$. 这就完全证明了：如果对于某个 C 来说 $A\cap B' = C\cap C'$，则 $A\cap B = A$.

习　题　III

由下列公理 A1—A7 推导习题 1—40 各结果:

A1. 以 A, B, C, $\cdots$ 为元素的集合 K 对于并运算是封

---

* 这句话(从第 7 行"因为"开始)是多余的. ——译者注

闭的，且若 $A = B$，则 $A \cup C = B \cup C$。

A2. K 对于补运算是封闭的，且若 $A = B$，则 $A' = B'$。

A3. $A \cup B = B \cup A$。

A4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$。

A5. $A \cup A = A$。

A6. $(A' \cup B')' \cup (A' \cup B)' = A$。

A7. $A \cap B = (A' \cup B')'$。

1. $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$。
2. $A \cup A' = A' \cup A''$。
3. $A'' = A$。
4. $A \cup A' = B \cup B'$。
5. 定义 $1 = A \cup A'$，证明 1 是唯一的而且 $1 = A' \cup A$。
6. 定义 $0 = 1'$，证明 0 是唯一的。
7. 若 $A' = B'$，则 $A = B$。
8. $0 \cup A = A$。
9. $A \cap 1 = A$。
10. $A \cap A' = 0$。
11. $A \cap B = B \cap A$。
12. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$。
13. $A \cup B = (A' \cap B')'$。
14. $A \cap A = A$。
15. $A \cup 1 = 1$。
16. $A \cap 0 = 0$。
17. $A \cup (A \cap B) = A$。
18. $A \cap (A \cup B) = A$。
19. 若 $A' \cup B = B' \cup A = 1$，则 $A = B$。
20. 若 $A \cup B = 1$ 且 $A \cap B = 0$，则 $A' = B$。

21. $A \cap B \cap C$ 与用补代替其中的一项、两项或三项所得到的各式之并等于 1.

22. 若 U, V 是21 题中的由 $A \cap B \cap C$ 所得到的任何两个式子,则 $U \cap V = 0$.

23. $(A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cap B \cap C)$
$\cup (A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C)$.

24. $[A \cap (B \cup C)]' = (A \cap B' \cap C')$
$\cup (A' \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C')$
$\cup (A' \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B' \cap C')$.

25. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup [A \cap (B \cup C)]' = 1$.

26. $[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cap [A \cap (B \cup C)]' = 0$.

27. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

28. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

29. 若 $A \cup B = B$, 则 $A \cap B = A$; 其逆亦真.

30. 若 $A \cup B = B$, 则 $A' \cup B = 1$; 其逆亦真.

31. 若 $A \cup B = B$, 则 $A \cap B' = 0$; 其逆亦真.

32. 我们定义 $A \subset B$ 等价于 $A \cap B' = 0$, 给出三个其它的等价形式.

33. 若并和补适合下表,证明所有公理除 A 3 外均能被元素 0, 1, 2, 3, 4, 5 所满足.

∪	0	1	2	3	4	5	′
0	0	1	2	3	4	5	1
1	1	1	1	1	1	1	0
2	2	1	2	1	1	2	3
3	3	1	1	3	3	1	2
4	4	1	1	4	4	1	5
5	5	1	5	1	1	5	4

34. 证明由下表给出的系统满足 A 4 以外的所有公理。

$\cup$	0	1	2	3	′
0	0	1	2	3	1
1	1	1	2	0	0
2	2	2	2	1	3
3	3	0	1	3	2

35. 证明由下表给出的系统满足 A 5 以外的所有公理。

$\cup$	0	1	2	′
0	0	1	2	1
1	1	1	1	0
2	2	1	1	2

36. 证明由下表给出的系统满足 A 6 以外的所有公理。

$\cup$	0	1	2	3	4	5	′
0	0	1	2	3	4	5	1
1	1	1	1	1	1	1	0
2	2	1	2	1	1	1	3
3	3	1	1	3	1	1	2
4	4	1	1	1	4	1	5
5	5	1	1	1	1	5	4

37. 证明方程

$$X+Y=A+B$$

的一般解是 $X=A+U$，$Y=B+U$，此处 U 是任意的。

38. 求出下列方程的一般解：

(1) $X\times Y=A\times B$，

(2) $C\cap X=C\cap Y$，

(3) $A\cap X=0$。

39. 证明方程

$$A \cup X = B$$

当且仅当 $A \subset B$ 时，有一个解；且当这个条件满足时，证明其一般解是

$$X = (U \cup A') \cap B.$$

40. 求出方程

$$A \cap X = B$$

有解的条件，且当这条件被满足时，求出其一般解.

第四章 语句逻辑

4.0. 语句代数

在本章中我们首先证明布尔代数也是**语句代数**. 如果 A, B 是集合,则我们知道

当且仅当"$x \in A$ 或 $x \in B$"时,"$x \in A \cup B$".

当且仅当"$x \in A$ 且 $x \in B$"时,"$x \in A \cap B$".

当且仅当"$x \notin A$"(即 x 不属于 A)时,"$x \in A'$".

于是,如果我们用 A, B 代替语句 $x \in A$, $x \in B$, 则"$A \cup B$"等价于"A 或 B","$A \cap B$"等价于"A 与 B",而"A'"则等价于"非 A". 因为 $x \in 0$ 对于每个 x 都是假的,故我们用 0 来代替一个永假语句;反之,因为 $x \in 1$ 对每个 x 都是真的,故用 1 来代替一个永真语句. 一个证明过的公式,如"$A \cup A' = 1$"现在读作"A 或非 A 是永真的",而"$A \cap A' = 0$"则读作"A 与非 A 是永假的".

在这个解释中我们也可以找到包含符号的应用. 因为当且仅当 $A' \cup B = 1$ 时 $A \subset B$, 故我们用 $A \subset B$ 来代替语句"非 A 或 B";但当且仅当 $x \in A$ 蕴涵 $x \in B$ 时 $A \subset B$, 因此事实上我们是在容许自己用"$A \subset B$"来代替"A 蕴涵 B". 这样,当且仅当"B 或非 A"时,"A 蕴涵 B".

4.01. 2.74 节中的结果现在可以改述成:一个语句(由语句变元用"与","或"及"非"建立起来的)是永真的,当且仅当它对于用真或假语句 1, 0 对它的变元所作的每一代换为真.

4.02. 在 2.74 节中所给出的检验可证明性的表格方法在语句

逻辑中称为**真值表法**. 例如为了检验是否有

$$A \cap B \cap (A \cup B)' = 0,$$

我们建立下表:

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A \cap B$	$(A \cap B) \cap (A \cup B)'$
0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0

在前面两列中我们写上 A, B 的四对值,并在以下各列的每一行中,我们写上当 A, B 取该行中的值时列的顶部的式子所取的值. 最后一列表明语句 $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ 是有效的.

作为另一个例子,我们考虑语句

$$(A' \cup B)' \cup (A \cup C)' \cup (B \cup C) = 1.$$

因为共有 8 个 A, B, C 的值的三元组,故现在真值表包含 $2^3 = 8$ 行.

A	B	C	A'	$A' \cup B$	$(A' \cup B)'$	$(A \cup C)'$	$B \cup C$	
0	0	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	1

在最后一列中我们写上

$$(A' \cup B)' \cup (A \cup C)' \cup (B \cup C)$$

的值,在每一行中这个值都是 1, 这就证明了"(A 蕴涵 B) 蕴

涵[(C 或 A)蕴涵(C 或 B)]"是永真的.

4.1. 初始语句(公理)及推理法则

单纯通过把并、交与补读作析取(或)、合取(与)和否定(非)来重复前几章的工作当然是乏味的. 然而我们可以给出语句逻辑的一个相当不同的说明, 在其中元素 0 与 1 并不起作用, 而我们从某些初始语句及某些变换法则(称为推理法则)导出永真语句的集合.

为了强调这种新的观点, 我们用小写斜体字母表示语句变元, 并用符号 $\vee$, &, $\neg$, $\rightarrow$(读作或、与、非、蕴涵)来代替 $\cup$, $\cap$, $'$, $\subset$.

我们取下列语句作为初始语句(公理):

4.11. $(p \vee p) \rightarrow p$,

4.12. $p \rightarrow (p \vee q)$,

4.13. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$,

4.14. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)]$.

然而,此处蕴涵并不作为一个独立的关系出现, $p \rightarrow q$ 只不过看作是 $\neg p \vee q$的一种简写. 虽然我们分别把"$\vee$","$\neg$"读作"或"、"非",但除了就公理本身而言可以考虑给予这些符号一种意义以外,这并不意味着符号"$\vee$","$\neg$"具有指定给他们的意义. 语句由语句变元构成, 这样, p 是一个语句, 又如果 P, Q 是语句,则 $\neg P$, $P \vee Q$ 也是语句. 注意这里大写字母的用法.P, Q 本身不是语句,而是用来代替语句的. 在这整章中我们将坚持这一约定. 为了进一步构造由这些公理可证明的语句,我们有两个变换或推理法则:

如果在一个可证明的语句中包含一个变元 p, 则用一个语句来代替 p 所得到的语句也是一个可证明的语句. 我们称

这个法则为**代换**（substitution）**法则**.

如果 P, $P \to Q$ 都是可证明的语句，则 Q 也是可证明的语句. 这个法则可以叫做**分离**（detachment）**法则**.

例如将公理 4.12 中的 q 写成 $p \vee \neg q$ 我们得到可证明的语句

$$p \to \{p \vee (p \vee \neg q)\}.$$

4.2. 公理的完备性

我们首先注意，如果将 $\vee$ 写作 $\cup$，将 $\neg$ 写作 $'$，则当我们按所有可能方法用 0，1 来代替变元时，所有公理仅取值 1. 这样

4.11. 式变成 $(p \cup p)' \cup p = p' \cup p = 1$;

4.12. 式变成 $p' \cup (p \cup q) = 1 \cup q = 1$;

4.13. 式变成 $(p \cup q)' \cup (q \cup p) = (p \cup q)' \cup (p \cup q) = 1$; 且

4.14. 式变成 $(p' \cup q)' \cup (r \cup p)' \cup (r \cup q)$，如我们已经证明的，这个式子的值为 1.

这样，各公理仅取值 1. 这个取常值的性质在代换下当然保持，因为如果某个包含一个变元 p 的语句，不论 p 取值 0 或 1 时，仅取值 1，则用某个语句 P 代替 p 所得到的语句必定仍然仅取值 1. 最后我们注意，如果 P 及 $P \to Q$ 两者都等于 1，则 Q 等于 1，因为 $1 \to 0 = 1' \cup 0 = 0 \cup 0 = 0$.

我们已经证明，所有从公理运用推理法则导出的语句仅取值 1. 反之，我们还可证明每个仅取值 1 的布尔表达式（即每一个永真语句）都可由公理 4.11—4.14 导出，故这些公理对于真值表是**完备的**. 我们首先概括地给出证明，然后补充其细节.

证明的必要步骤是：我们首先证明，当且仅当 P 及 Q 都可证明时 $P \& Q$ 是可证明的；如果 P 是可证明的，则 $R \vee P \vee S$ 也是可证明的；$P \vee \neg P$ 是可证明的；当且仅当我们能证明一个语句的标准形式

$$D_1 \& D_2 \& \cdots D_k$$

(其中每一个 D_i 是变元或否定变元的析取)时，这个语句是可证明的. 然后我们证明永真语句 S 具有永真的标准形式，而这标准形式在其每一析取 D_i 中必定包含某个对 $p \vee \neg p$，由此得到每个 D_i 是可证明的，故它们的合取是可证明的，从而最后 S 是可证明的.

4.3. 符号 ⊢

由公理 4.14，用 $\neg r$ 代替 r，我们得到

$$(p \to q) \to [(r \to p) \to (r \to q)],$$

由此再进行代换就有

4.31. $$(Q \to R) \to [(P \to Q) \to (P \to R)].$$

因此得知，由 $P \to Q$ 及 $Q \to R$ 我们可以导出 $P \to R$. 这是因为由 $Q \to R$ 及 4.31，根据分离法则我们推得

$$(P \to Q) \to (P \to R),$$

于是由 $P \to Q$ 并再次利用分离法则即可推得 $P \to R$.

4.32. 为了表示语句 Q 可由语句 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 推出这一事实，我们将写为

$$P_1, P_2, \cdots, P_n \vdash Q.$$

如果 Q 仅从公理可以推出（即 Q 是可证明的），则我们写为 $\vdash Q$.

因此我们刚才已经证明

4.33. $$P \to Q,\ Q \to R \vdash P \to R.$$

由 4.13，根据代换法则，我们有

$$(P \vee Q) \to (Q \vee P),$$

由此，根据分离法则，由 $P \vee Q$ 我们可以推出 $Q \vee P$，即

4.34. $$(P \vee Q) \vdash (Q \vee P).$$

因为由 4.12，4.13 有 $Q \to (Q \vee \neg P) \to (\neg P \vee Q)^*$，故我们有

4.341. $$Q \vdash (P \to Q).$$

由 4.14 及分离法则，我们又有

4.35. $$P \to Q \vdash (R \vee P) \to (R \vee Q).$$

于是，由 4.34，4.35 我们由 $P \to Q$ 导出

$$(P \vee R) \to (R \vee P), \ (R \vee P) \to (R \vee Q),$$
$$(R \vee Q) \to (Q \vee R)$$

故由 4.33 有

$$(P \vee R) \to (Q \vee R),$$

于是我们就证明了

4.36. $$P \to Q \vdash (P \vee R) \to (Q \vee R).$$

同理我们可以证明

4.361. $$P \to Q, \ R \to S \vdash P \vee R \to Q \vee S$$

因为由 $P \to Q$ 有 $P \vee R \to Q \vee R$，又由 $R \to S$ 有 $Q \vee R \to Q \vee S$.

现在我们容易证明

4.37. $$p \to p.$$

因为由 4.12 有 $p \to (p \vee p)$，又由 4.11 有 $(p \vee p) \to p$，于是由 4.33 有

$$p \to p,$$

即

$$\neg p \vee p,$$

又由 4.34，

---

* $A \to B \to C$ 型的式子表示两个可证明的语句 $A \to B$ 及 $B \to C$，以下同. ——译者注

$$p \vee \neg p.$$

用 $\neg p$ 代替 p 我们有

$$\neg\neg p \vee \neg p,$$

因此，由 4.34 有

$$\neg p \vee \neg\neg p,$$

即

4.38. $$p \to \neg\neg p.$$

又用 $\neg p$ 代替 p 得

$$\neg p \to \neg\neg\neg p,$$

又由公理 4.14 有

$$(\neg p \to \neg\neg\neg p) \to [(p \vee \neg p) \to (p \vee \neg\neg\neg p)],$$

由此根据分离法则有

$$(p \vee \neg p) \to (p \vee \neg\neg\neg p),$$

又再利用分离法则，由 4.37 有

$$p \vee \neg\neg\neg p,$$

因此

$$\neg\neg\neg p \vee p,$$

即

$$\neg\neg p \to p.$$

这样我们就同时证明了 $p \to \neg\neg p$ 及 $\neg\neg p \to p$.

4.4. 符　号 $\leftrightarrow$

如果 P, Q 是两个这样的语句，使得 $P \to Q$, $Q \to P$ 两者都是可证明的，则我们说 P, Q 是等价的，并写为

$$P \longleftrightarrow Q.$$

如果 $P \longleftrightarrow Q$，则当然有 $Q \longleftrightarrow P$，这是因为其中的每一个都代表 $P \to Q$ 及 $Q \to P$. 如果 $P \longleftrightarrow Q$ 而且 P 是可证明的，

则 Q 也是可证明的，这是因为 Q 可由 P 及 $P \to Q$ 得到。

于是，特别有

4.41. $$p \longleftrightarrow \neg\neg p.$$

4.42. 由 4.35 直接可得

$$P \longleftrightarrow Q \vdash (R \vee P) \longleftrightarrow (R \vee Q),$$

由 4.36 有

$$P \longleftrightarrow Q \vdash (P \vee R) \longleftrightarrow (Q \vee R),$$

又由 4.361 有

$$P \longleftrightarrow Q,\ R \longleftrightarrow S \vdash P \vee R \longleftrightarrow Q \vee S.$$

下一步我们证明

4.43. $$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p).$$

因为，由

$$q \to \neg\neg q$$

及 4.35 我们推出

$$(\neg p \vee q) \to (\neg p \vee \neg\neg q),$$

于是由 4.34 有

$$(\neg p \vee q) \to (\neg\neg q \vee \neg p),$$

即

$$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p).$$

由此有

4.44. $$(P \to Q) \vdash (\neg Q \to \neg P),$$

及

4.45. $$(P \longleftrightarrow Q) \vdash (\neg P \longleftrightarrow \neg Q).$$

如果 $\mathscr{S}(P)$ 是包含 P 的任一个语句，且如果 $P \longleftrightarrow Q$，则

$$\mathscr{S}(P) \longleftrightarrow \mathscr{S}(Q).$$

因为由 4.42，4.45 可知，在作析取与否定时，等价关系是保持的，故当我们分别由 P 与 Q 平行地建立 $\mathscr{S}(P)$ 与 $\mathscr{S}(Q)$ 时，等价关系也是保持的。

例如，考虑语句

$$\neg[(R \vee P) \vee S],$$

我们有

$$P \longleftrightarrow Q,$$

$$R \vee P \longleftrightarrow R \vee Q,$$

$$(R \vee P) \vee S \longleftrightarrow (R \vee Q) \vee S,$$

最后

$$\neg[(R \vee P) \vee S] \longleftrightarrow \neg[(R \vee Q) \vee S].$$

作为另一个例子，我们取语句

$$(P \vee R) \vee \neg(S \vee \neg P).$$

我们同时建立这个语句的两个部分

$$P \longleftrightarrow Q, \qquad P \longleftrightarrow Q,$$

$$P \vee R \longleftrightarrow Q \vee R, \qquad \neg P \longleftrightarrow \neg Q,$$

$$S \vee \neg P \longleftrightarrow S \vee \neg Q,$$

$$\neg(S \vee \neg P) \longleftrightarrow \neg(S \vee \neg Q).$$

于是由 4.42 有

$$(P \vee R) \vee \neg(S \vee \neg P) \longleftrightarrow (Q \vee R) \vee \neg(S \vee \neg Q).$$

特别地，由 4.41，我们有

$$\mathscr{S}(p) \longleftrightarrow \mathscr{S}(\neg\neg p).$$

4.5. 符　号　&

我们引入

$$P \,\&\, Q$$

作为 $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ 的一种简写.

因为

$$\neg P \vee \neg Q \longleftrightarrow \neg Q \vee \neg P,$$

所以

$$\neg(\neg P \vee \neg Q) \longleftrightarrow \neg(\neg Q \vee \neg P),$$

即

$$P \,\&\, Q \longleftrightarrow Q \,\&\, P.$$

4.51. $$A \to P,\ B \to P \vdash (A \vee B) \to P.$$

因为

$$A \to P \vdash A \vee B \to P \vee B,$$

$$B \to P \vdash P \vee B \to P \vee P,$$

又因为（由 4.11）$P \vee P \to P$，故我们有 4.51。

4.52. $$P \to A,\ P \to B \vdash P \to (A \,\&\, B).$$

因为

$$P \to A \vdash \neg A \to \neg P,$$

$$P \to B \vdash \neg B \to \neg P,$$

又由 4.51

$$\neg A \to \neg P,\ \neg B \to \neg P \vdash (\neg A \vee \neg B) \to \neg P$$

及

$$(\neg A \vee \neg B) \to \neg P \longleftrightarrow P \to (A \,\&\, B).$$

4.53. $$P \vee (Q \vee R) \longleftrightarrow Q \vee (P \vee R).$$

因为

$$R \to R \vee P \to P \vee R,$$

故

$$Q \vee R \to Q \vee (P \vee R);$$

此外

$$P \to P \vee R \to (P \vee R) \vee Q \to Q \vee (P \vee R),$$

故有（由 4.51）

4.531. $$P \vee (Q \vee R) \to Q \vee (P \vee R);$$

交换 P, Q 得

4.532. $$Q \vee (P \vee R) \to P \vee (Q \vee R);$$

由 4.531 及 4.532 我们即得 4.53。

由 4.53 我们可以导出析取的结合律，因为我们有

$$Q \vee R \to R \vee Q,$$

故

$$P \vee (Q \vee R) \to P \vee (R \vee Q)$$

及

$$P \vee (R \vee Q) \to R \vee (P \vee Q) \to (P \vee Q) \vee R$$

这就证明了

4.54. $$P \vee (Q \vee R) \to (P \vee Q) \vee R.$$

因此

$$R \vee (Q \vee P) \to (R \vee Q) \vee P$$
$$\to (Q \vee R) \vee P \to P \vee (Q \vee R);$$

但

$$(P \vee Q) \vee R \to (Q \vee P) \vee R \to R \vee (Q \vee P),$$

故

$$(P \vee Q) \vee R \to P \vee (Q \vee R)$$

由此

4.55. $$P \vee (Q \vee R) \longleftrightarrow (P \vee Q) \vee R.$$

在 4.55 中用 $\neg P$, $\neg Q$, $\neg R$ 代 P, Q, R, 我们有

$$\neg P \vee (\neg Q \vee \neg R) \longleftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee \neg R,$$

在这个等价关系的两边取否定，即得

4.56. $$P \& (Q \& R) \longleftrightarrow (P \& Q) \& R$$

这就是合取的结合律.

因为，由 4.55 有

$$\neg P \vee [\neg Q \vee (P \& Q)] \longleftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee (P \& Q)$$

又因为 $P \& Q$ 代表 $\neg(\neg P \vee \neg Q)$，所以 $(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \& Q)$ 可由 $p \vee \neg p$ 导出，因此

$$\neg P \vee [\neg Q \vee (P \& Q)]$$

是可证明的，即

4.57. $$P \to [Q \to (P \& Q)]$$

是可证明的．由此有

4.571. $$P, Q \vdash P \& Q.$$

反之，$(P \& Q) \to P$，因为

$$(\neg P \vee \neg Q) \vee P \longleftrightarrow (\neg Q \vee \neg P) \vee P$$
$$\longleftrightarrow \neg Q \vee (\neg P \vee P),$$

而 $\neg Q \vee (\neg P \vee P)$ 可由 4.37 及公理 4.12，4.13 得到．

下面的等价关系

4.572. $$Q \to (P \to R) \longleftrightarrow (P \& Q) \to R \longleftrightarrow P \to (Q \to R)$$

也是结合律的直接推论，因为它们可以写成如下形式

$$\neg Q \vee (\neg P \vee R) \longleftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R$$
$$\longleftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R).$$

现在我们来看分配律．

4.58. $$[P \vee (Q \& R)] \to [(P \vee Q) \& (P \vee R)].$$

我们有

$$Q \& R \to Q, \quad Q \& R \to R,$$

故

$$P \vee (Q \& R) \to P \vee Q, \quad P \vee (Q \& R) \to P \vee R,$$

由此得

$$[P \vee (Q \& R)] \to [(P \vee Q) \& (P \vee R)].$$

在证明 4.58 之逆以前，我们先证明

4.581. $$P \to (Q \to R) \vdash (A \vee P) \to [(A \vee Q) \to (A \vee R)].$$

由公理 4.14 有

$$(Q \to R) \to [(A \vee Q) \to (A \vee R)]$$

及

$$A \to A \vee R,$$

故由 4.341 有

$$(A \vee Q) \to [A \to (A \vee R)],$$

因此，由 4.572 有

$$A \to [(A \vee Q) \to (A \vee R)],$$

因此我们从 $P \to (Q \to R)$ 导出

$$(A \vee P) \to [(A \vee Q) \to (A \vee R)].$$

因为 $Q \to (R \to (Q \& R))$，由此有

$$(P \vee Q) \to \{(P \vee R) \to [P \vee (Q \& R)]\},$$

再利用 4.572 就有

4.59. $[(P \vee Q) \& (P \vee R)] \to P \vee (Q \& R)$.

这就证明了分配律中的一个：

4.591. $P \vee (Q \& R) \longleftrightarrow [(P \vee Q) \& (P \vee R)]$.

将 P, Q, R 用它们的否定来代替，并取这个等价关系两边的否定(并用 P 代替 $\neg\neg P$, 等等)我们得到第二分配律

4.592. $P \& (Q \vee R) \longleftrightarrow \{(P \& Q) \vee (P \& R)\}$.

4.6. 范　　式

每一个语句都有一个等价的**合取范式**

$$P_1 \& P_2 \& \cdots \& P_n,$$

此处每个 P_i 是变元或否定变元的析取．例如，

$$(p \& q) \vee [(q \& r) \to p]$$
$$\longleftrightarrow (p \vee \neg q \vee \neg r) \& (p \vee q \vee \neg q \vee \neg r).$$

一个语句的范式可由重复应用等价关系

$$\neg (P \& Q) \longleftrightarrow \neg P \vee \neg Q,$$
$$\neg (P \vee Q) \longleftrightarrow \neg P \& \neg Q$$

及分配律

$$[P \vee (Q \& R)] \longleftrightarrow [(P \vee Q) \& (P \vee R)]$$

而得到，上述等价关系使否定符号能透过任何括号直接加到变元的前面，而分配律则可以去掉围绕合取的括号．

这样，例如

$$(p \& q) \vee [(q \& r) \rightarrow p]$$
$$\longleftrightarrow (p \& q) \vee [\neg q \vee \neg r \vee p]$$
$$\longleftrightarrow (p \vee \neg q \vee \neg r \vee p) \& (q \vee \neg q \vee \neg r \vee p)$$
$$\longleftrightarrow (p \vee \neg q \vee \neg r) \& (p \vee q \vee \neg q \vee \neg r).$$

每个语句也有第二种范式，即析取范式

$$Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_n,$$

此处每个 Q_i 是变元或否定变元的合取。

因为如果

$$\neg P \longleftrightarrow P_1 \& P_2 \& \cdots \& P_n,$$

则

$$P \longleftrightarrow \neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \cdots \vee \neg P_n.$$

而 $\neg P_i$ 是变元或否定变元的合取，这是因为 P_i 是变元或否定变元的析取。

4.61. 如果一个语句是永真的，则任一个与之等价的语句也是永真的，因为如果 P 是永真的，且 $P \rightarrow Q$ 是真的，则蕴涵关系的真值表表明 Q 也是真的（事实上，仅当 P 为真而 Q 为假时 $P \rightarrow Q$ 是假的）。又如果 $P_1 \& P_2$ 是永真的，则 P_1 与 P_2 都是永真的（因为 $P_1 \& P_2$ 除了 P_1 与 P_2 两者都是真的外都是假的）。这样，如果某个语句是永真的，且 $P_1 \& P_2 \& \cdots \& P_n$ 是这个语句的范式，则每个 P_i 都是永真的。现在假设在 P_i 中以否定形式出现的任何变元都不以非否定形式出现，则 P_i 不能是永真的，这是因为如果我们令各否定变元取值 1，而令非否定变元取值 0，则 P_i 取值 0*。于是如果语句 P 是永真的，且

$$P_1 \& P_2 \& \cdots \& P_n$$

是其范式，则每一 P_i 至少包含某个变元两次，一次不带否定符

* 原书将 1 误为 0，将 0 误为 1。——译者注

号，另一次则带否定符号．

我们已指出过，对于任何变元 p，$p \vee \neg p$ 是可证明的，故不论语句 Q 与 R 具有怎样的形式，

$$Q \vee p \vee \neg p \vee R$$

都是可证明的，因此 P_i 是可证明的．从而由 4.571，$P_1 \& P_2 \& \cdots \& P_n$ 是可证明的，于是最后我们见到 P 是可证明的．

这样我们就证明了

每个永真语句是可证明的．

我们把这个事实说成是**公理 4.11—4.14 对于真值表是完备的**．公理的完备性也有另一种意义：如果我们将任一个不能由公理证明的语句加到公理中，则扩大后的系统是**不相容的**，即每一个语句都成为可证明的．

因为如果 P 不能从公理 4.11—4.14（我们现在称它为公理系统 A）来证明，则 P 的范式

$$P_1 \& P_2 \& \cdots \& P_n$$

是不可证明的，从而最后有某个 P_i 是不可证明的，因此 P_i 不包含同一变元的否定形式和非否定形式．现在让我们取 P 作为第五公理并称扩大后的公理系统为 A^+．因为在 A 中 P_i 可由 P 导出，故它在 A^+ 中是可证明的；用 p 代替 P_i 中的每个非否定变元，用 $\neg p$ 代替每个否定变元，则 P_i 变成 $p \vee p \vee \cdots \vee p$，所以

$$p \vee p \vee \cdots \vee p$$

在 A^+ 中是可证明的，于是，由 4.11，p 本身是可证明的．但此处 p 是一个任意的语句，故 A^+ 是不相容的．

公理系统 A 是相容的（不是矛盾的），因为仅有永真语句在 A 中才是可证明的，而例如 $p \& \neg p$ 则是不可证明的．

4.7. 公理的独立性

公理 4.11—4.14 是独立的 为了证明公理 4.11 的独立性，我们建立公理 4.12，4.13，4.14 的一个不满足 4.11 的模型．设语句变元取值 0，1，2，并设 $p \vee q$ 在 p，q 不同时为 2 时取值 $p \cdot q$，而当两者都是 2 时则取值 0．对于 p 的值 0，1，2，$\neg p$ 的值分别为 1，0，2．则所有的公理除第一个外均取值 0，但 $(2 \vee 2) \to 2$ 取值 2；此外，如果 P 取值 0，$P \to Q$ 亦取值 0，则 Q 的值亦必为 0． 当然，一个仅取 0 值的语句经任何代换后所得的语句仍然仅取 0 值．这样公理 4.12—4.14 的所有推论仅取 0 值，但公理 4.11 却取值 2，故公理 4.11 不能由公理 4.12—4.14 导出，从而对它们是独立的．

为了建立公理 4.12 的独立性，我们给变元以同样的值 0，1，2，但现在当 p 与 q 的值均为 2 时 $p \vee q$ 取的值为 2，又对于 p 的值 0，1，2，$\neg p$ 的值为 2，1，0． 公理 4.11，4.13，4.14 仅取 0，1 值， 但公理 4.12 却可取值 2（当 p 的值为 1，q 的值为 2 时）．如果 P 不取值 2，$P \to Q$ 也不取值 2，则 Q 不取值 2，并且从 P 经代换而得到的语句都不取值 2，这就证明了从 4.11，4.13，4.14 导出的语句不取值 2．因为公理 4.12 能取值 2，故公理 4.12 不是其它公理的推论．

为了证明第三个公理的独立性，我们考虑有 0，1，2，3 四个值的模型，其中否定与析取如下表给出：

p	0	1	2	3
$\neg p$	1	0	0	2

$\vee$	1	2	3	q
1	1	2	3	
2	2	2	0	
3	3	3	3	
p				

$p \vee 0 = 0 \vee p = 0.$

在这个模型中，公理 4.11，4.12，4.14 仅取值 0，又如果 $P=0$ 且 $P \to Q=0$，则 $Q=0$，但公理 4.13 当 $p=2$，$q=3$ 时却取值 3.

证明第四个公理的独立性的模型如下表所示：

p	0	1	2	3
$\neg p$	1	0	3	0

$p \vee 0=0 \vee p=0$

$\vee$	1	2	3	q
1	1	2	3	
2	2	2	0	
3	3	0	3	
p				

在这个模型中，公理 4.11，4.12，4.13 仅取值 0，公理 4.14 当 $p=3$，$q=2$，$r=2$ 时取值 2，又由 $P=0$，$P \to Q=0$ 有 $Q=0$。

4.8. 演 绎 定 理

我们以证明语句逻辑的演绎定理来结束本章.

4.81. 如果 Q 可由 P 导出，且在推导 Q 时，没有对 P 中的变元作代换，则 $P \to Q$ 是可证明的. 即

如果 $P \vdash Q$，则 $\vdash P \to Q$.

考虑从 P 到 Q 的推导. 这个推导中的每一行或是 P，或是一个公理，或可由前面某行根据代换法则推出，或可由前面某两行根据分离法则推出. 在这个推导的每一行前面加上前缀"$P \to$".

第一种情况成为 $P \to P$，这个式子是可证明的；公理 A 成为 $P \to A$，这个式子也是可证明的. 由 B 到 C 根据代换法则的推理成为由 $P \to B$ 到 $P \to C$ 根据代换法则的推理（因为没有对 P 中的变元作代换），又由 B，$B \to C$ 到 C 的推理成为由 $P \to B$，$P \to (B \to C)$ 到 $P \to C$ 的推理，这个推理是有效

的，因为

$$P \to (B \to C) \longleftrightarrow B \to (P \to C),$$

又

$$P \to B,\ B \to (P \to C) \vdash P \to (P \to C)$$

于是最后就有

$$P \to (P \to C) \longleftrightarrow P \to C.$$

证明的最后一行现在是 $P \to Q$，故 $P \to Q$ 被证明.

习　题　IV

1. 证明下列语句对是真值表等价的：
   (1) $p \to (q \,\&\, r)$,　$(p \to q) \,\&\, (p \to r)$;
   (2) $P \to (q \vee r)$, $(p \to q) \vee (p \to r)$;
   (3) $p \to (q \to r)$, $(p \to q) \to (p \to r)$;
   (4) $(p \to q)$, $p \to (p \to q)$.
2. 用真值表法证明下列语句的有效性：
   (1) $(p \to r) \to \{(q \to r) \to [(p \vee q) \to r]\}$;
   (2) $(p \to \neg p) \to \neg p$;
   (3) $(\neg p \to p) \to p$;
   (4) $(p \to q) \to [(p \to \neg q) \to \neg p]$.
3. 从公理 4.11—4.14 推导出以上语句 2.(1)—(4).
4. 将下列语句表成合取范式：
   (1) $[(p \to q) \,\&\, (q \to p)] \to \neg[(p \to q) \vee (q \to p)]$;
   (2) $[(p \to q) \vee r] \to [(q \to p) \,\&\, r]$;
   (3) $(\neg p \,\&\, \neg q) \to (r \to q)$.
5. 证明下列 15 个语句：
   (1) $p \to (q \to p)$;
   (2) $[(p \to q) \to p] \to p$;

(3) $(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$;

(4) $(p \& q) \to p$;

(5) $(p \& q) \to q$;

(6) $(p \to q) \to \{(p \to r) \to [p \to (q \& r)]\}$;

(7) $p \to (p \vee q)$;

(8) $q \to (p \vee q)$;

(9) $(p \to r) \to \{(q \to r) \to [(p \vee q) \to r]\}$;

(10) $(p \longleftrightarrow q) \to (p \to q)$;

(11) $(p \longleftrightarrow q) \to (q \to p)$;

(12) $(p \to q) \to \{(q \to p) \to (p \longleftrightarrow q)\}$;

(13) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$;

(14) $p \to \neg\neg p$;

(15) $\neg\neg p \to p$.

6. 证明下列各推理法则:

(1) $P, Q \vdash P \& Q$;

(2) $P \vdash P \vee Q$;

(3) $P \to Q$, $\neg Q \vdash \neg P$;

(4) $(P \& Q) \to R$, $P \vdash Q \to R$.

7. 证明每一个语句都有一个真值表等价的语句，这个等价语句可仅用真值表为

p	q	$p \mid q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

的真值函数 $p \mid q$ 来表示.

8. 证明每一个语句都有一个真值表等价的语句，这个等

价语句可仅用真值表为

p	q	r	(p, q, r)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

的真值函数（p, q, r）来表示。

第五章　格

5.0. 半序关系

集合K的元素之间的一个关系 $a\mathbf{R}b$ 称为**半序关系**，如果

5.01. 对于K中的每个元素 a 有 $a\,\mathbf{R}\,a$；

5.02. $a\,\mathbf{R}\,b$ 及 $b\,\mathbf{R}\,a$ 蕴涵 $a=b$；

5.03. $a\,\mathbf{R}\,b$ 及 $b\,\mathbf{R}\,c$ 蕴涵 $a\,\mathbf{R}\,c$.

此时集合K称为**被关系 R 半序化**. 我们并不要求关系 $a\,\mathbf{R}\,b$, $b\,\mathbf{R}\,a$ 中的一个对于每一对元素都成立. 例如，集合之间的包含关系是一个半序关系，因为 $A\subset A$ 总是成立的，$A\subset B$ 及 $B\subset A$ 蕴涵 $A=B$，且如果 $A\subset B$，$B\subset C$ 则 $A\subset C$；但对于任意两个集合，并非它们之中的一个一定被另一个所包含.

如果关系 $\mathbf{R}$ 满足 5.01，5.02，5.03 且对于**每一**对元素 a，b，$a\,\mathbf{R}\,b$ 与 $b\,\mathbf{R}\,a$ 中必有一个成立，则称 $\mathbf{R}$ 为**一线性次序关系**，K则称为**被 R 线性次序化**. 例如，自然数被关系"不大于"线性次序化. 对于一对元素 a，b，如果关系 $a\,\mathbf{R}\,b$，$b\,\mathbf{R}\,a$ 中有一个成立，则称 a，b **是可比较的.**

5.1. 半序集合、极大元素与极小元素

因为包含是半序关系的一个最有代表性的实例，故我们将用包含符号 $\subset$ 来表示半序，并将 $a\subset b$ 读作 ***a* 在 *b* 中或 *b* 包含 *a*（或 *a* 在 *b* 之前，*b* 在 *a* 之后）.**

5.101. 在半序集合K中，当且仅当对于K中的每一个k，$k\subset a$蕴涵$k\subset b$时，我们有$a\subset b$。由5.03，蕴涵的必要性是显然的；对于其逆，我们注意，a是k的一个值，故$a\subset a$蕴涵$a\subset b$。

同理我们可以证明：当且仅当对于K中的所有k，$b\subset k$蕴涵$a\subset k$时，$a\subset b$。

5.102. 由5.101有，当且仅当对于所有的k都有

$$k\subset a\longleftrightarrow k\subset b$$

时，$a=b$。

因为当且仅当对于所有的k，$k\subset a$蕴涵$k\subset b$时，$a\subset b$，又当且仅当$k\subset b$蕴涵$k\subset a$时，$b\subset a$。

5.11. 半序集合K的元素a，如果a不包含K的(异于a本身)元素，则称为K的**极小元素**。例如人类“世代相传”(将每个人视为他自己的后代)这个半序关系下，没有子女的人都是极小元素。被包含在每一个元素中的元素称为**最小元素或零元素**；如果$0_1,0_2$是零元素，则$0_1\subset 0_2$，$0_2\subset 0_1$，故$0_1=0_2$，所以零元素是唯一的。一个半序集合可能有、也可能没有零元素。空集合是对于集合类在包含关系下的零元素，但正分数对于“不大于”关系则没有零元素。当零元素存在时，这个元素必定是仅有的极小元素。仅包含自身或零元素的元素称为**原子**。

5.12. 不被任何其它元素包含的元素称为**极大元素**；包含每一个元素的元素称为**单位元素或最大元素**(单位元素是唯一的)；仅被自身或单位元素包含的元素称为**反原子**。

5.2. 链、首元素与末元素

半序集合的线性有序子集称为一个**链**。这样，一个(有限)链是一个使得$a_1\subset a_2\subset a_3\subset\cdots\subset a_n$的元素$a_1$，$a_2$，$\cdots$，

a_n 构成的集合.

5.21. 任何有限链必有一个**首元素**和一个**末元素**.

因为如果 a 是任一个元素,则或者存在一个元素 $a' \subset a$,或对于每一个元素 x, $a \subset x$; 在后一种情况 a 就是首元素;在前一种情况或者 a' 是首元素,或存在一个 a'',使得 $a'' \subset a'$. 经有限步后我们就得到首元素. 用同样的方法我们可以确定链的末元素.

5.22. 仅有有限个元素的半序集合可用一个**顺序图**来表示. 例如以 a, b, c, d, e 为元素的一个集合,其中 a, c, d 是极小元素, e 是单位元素,且 a, b, e 是一个链,可用图 9 表示.

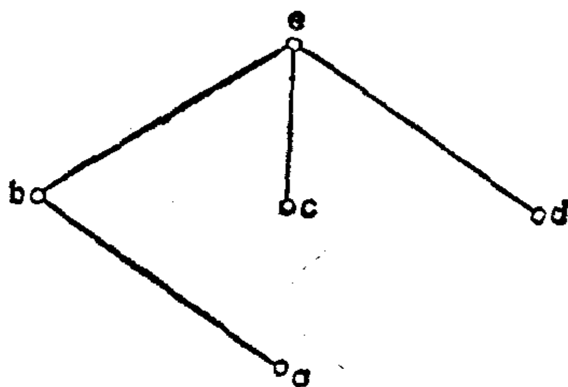


图 9

在这个图中包含关系用向上的倾斜连线来表示. 这样, $a \subset b$, $b \subset e$, $c \subset e$ 及 $d \subset e$.

另一个例子如图 10 所示,

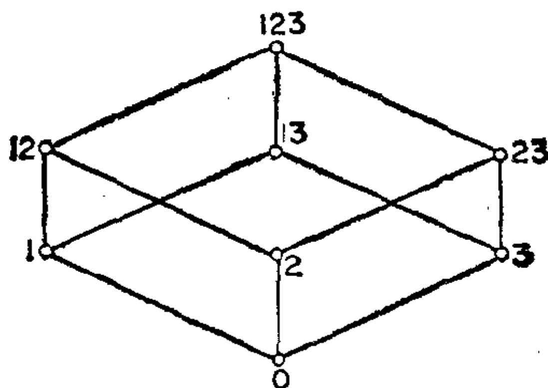


图 10

其中，例如，0，1，12，123 与 0,3,13,123 是链. 这个顺序图表示以 1，2，3 为元素的集合的所有子集所构成的集合类.

5.3. 上界与下界

如果 H 是半序集合 K 的一个子集，又如果存在 K 的一个元素 u 使得 $h \subset u$ 对于 H 的每个元素 h 都成立，则 u 称为集 H 的一个**上界**. 注意 u 与 H 中的每一个成员是可比较的. 类似地，如果 l 是 K 的一个元素，对于 H 的每个元素 h 都有 $l \subset h$，则 l 称为 H 的**下界**. 如果上界的集合（K 的一个子集）有一个最小元素，则这个元素称为 H 的**最小上界**，并用 lub H 来表示；如果下界的集合有一个最大元素，则这个元素称为 H 的**最大下界**，并用 glb H 来表示. 当然，无论是 lub H 或 glb H 都不是必须存在的；一个格*如果对于其中每个子集 H，lub H 与 glb H 都存在，则该格称为是**完备的**. 例如，在图 10 所表示的半序集合中，元素 0，1，2 的集合的最小上界为 12，集合 1，2，3 的最小上界为 123，但使得 $x^2 < 2$ 的有理数 x 的子集在有理数集中没有最小上界（因为没有一个有理数其平方等于 2).

如果 H 是一对元素 (a, b)，而且 H 的最小上界和最大下界存在，则当然有

$$\text{lub}\,(a, b) = \text{lub}\,(b, a), \quad \text{glb}\,(a, b) = \text{glb}\,(b, a).$$

因为 glb H 是一个下界，故对于 H 的任何 h，都有 glb $H \subset h$；故如果 $a \subset$ glb H，则对于 H 中所有的 h，有 $a \subset h$，所以 a 是 H 的一个下界. 事实上

5.31. $x \subset \text{glb}\,H \longleftrightarrow$ 对于 H 中的所有 h，$x \subset h$；因为如果对

---

* 格的定义见 5.4，这里先引用了.——译者注

于所有的 h, $x \subset h$, 则 x 是一个下界, 故 $x \subset \text{glb}\, H$ (H 的最大下界). 同理可证

5.32. $\text{lub}\, H \subset y \longleftrightarrow$ 对于 H 中的所有 h, $h \subset y$.

特别有

5.33. $\text{glb}\,(a, b) \subset a, \quad \text{glb}\,(a, b) \subset b$

及

5.34. $a \subset \text{lub}\,(a, b), \quad b \subset \text{lub}\,(a, b).$

因此

$\text{glb}\,(a, a) = a$ (因为 $a \subset a$ 且 $\text{glb}\,(a, a) \subset a$),

$\text{lub}\,(a, a) = a$ (因为 $a \subset \text{lub}\,(a, a)$, $a \subset a$);

此外还有

5.341. 如果 $a \subset b$, 则 $\text{glb}\,(a, b) = a$. 这是因为 a 是 (a, b) 的一个下界, 且 $\text{glb}\,(a, b) \subset a$. 又

5.342. 如果 $a \subset b$, 则 $\text{lub}\,(a, b) = b$. 这是因为 b 是 (a, b) 的一个上界, 又 $b \subset \text{lub}\,(a, b)$.

5.35. $\text{glb}\,[a, \text{glb}\,(b, c)] = \text{glb}\,(a, b, c).$

5.36. $\text{lub}\,[a, \text{lub}\,(b, c)] = \text{lub}\,(a, b, c).$

由 5.31 我们有

$$\begin{aligned} x \subset \text{glb}\,(a, b, c) &\longleftrightarrow x \subset a \,\&\, x \subset b \,\&\, x \subset c \\ &\longleftrightarrow x \subset a \,\&\, x \subset \text{glb}\,(b, c) \\ &\longleftrightarrow x \subset \text{glb}\,[a, \text{glb}\,(b, c)], \end{aligned}$$

从而由 5.102 即得 5.35, 5.36 类似地由 5.32 得到.

5.37. $\text{glb}\,[a, \text{lub}\,(a, b)] = a.$

5.38. $\text{lub}\,[a, \text{glb}\,(a, b)] = a.$

因为 $a \subset \text{lub}\,(a, b)$, 故由 5.341 即得 5.37, 又因为 $\text{glb}\,(a, b) \subset a$, 故由 5.342 即得 5.38.

5.4. 格

在一个半序集合中，如果每一对元素 (a, b) 都有一个最小上界和最大下界，则该半序集合称为一个**格**. 在格中我们用 $a \cup b$ 表示 (a, b) 的最小上界，用 $a \cap b$ 表示 (a, b) 的最大下界.

下面我们来证明，在任何格中交换律，结合律和吸收律* 成立:

5.41. $a \cup b = b \cup a; \quad a \cap b = b \cap a.$

5.42. $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c);$

$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c).$

5.43. $a \cap (a \cup b) = a; \quad a \cup (a \cap b) = a.$

关系 5.41 蕴涵在最小上界和最大下界的定义中(5.3节); 5.42 直接由 5.35, 5.36 得到; 5.43 由 5.37 和 5.38 得到.

5.5. 格的充分条件

5.50. 反之，一个集合如果关于两个运算 $\cup$, $\cap$ 是封闭的，而这两个运算满足 5.41, 5.42, 5.43, 那末，这个集合是一个格. 我们定义

5.51. $a \subset b \longleftrightarrow a \cap b = a;$

由 5.43 (及 5.41) 有

$$(b \cap a) \cup b = b, \quad a \cap (a \cup b) = a,$$

故 $a \subset b$ 也等价于 $a \cup b = b$.

我们必须证明，由 5.41, 5.42, 5.43 定义的 $a \cup b$ 和 $a \cap b$

* 原书在此处写为收缩律 (contraction law)，为使前后名称统一，仍译为吸收律. ——译者注

是 (a, b) 的关于由 5.51 定义的包含关系的最小上界和最大下界.

首先我们必须证明，$a \subset b$ 是一个半序关系，即我们必须证明：

$$a \subset a; \quad a \subset b \,\&\, b \subset c \rightarrow a \subset c; \quad a \subset b \,\&\, b \subset a \rightarrow a = b.$$

利用 5.51 这些关系变成

$$a \cap a = a; \quad a \cap b = a \,\&\, b \cap c = b \rightarrow a \cap c = a;$$
$$a \cap b = a \,\&\, b \cap a = b \rightarrow a = b.$$

这些关系中的第三个立即由 5.41 得到.

对于第一个关系我们注意由 5.43 有

$$a = a \cap [a \cup (a \cap b)] = a \cap a,$$

对于第二个关系，如果 $a \cap b = a$ 且 $b \cap c = b$，则

$$a \cap c = (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b = a.$$

现在我们来证明 $a \cup b$, $a \cap b$ 是(a, b) 的最小上界和最大下界. 我们必须证明

5.52. $$a \cap b \subset a, \quad a \cap b \subset b;$$

5.53. $$a \subset a \cup b, \quad b \subset a \cup b;$$

5.54. $$k \subset a \,\&\, k \subset b \rightarrow k \subset a \cap b;$$

5.55. $$a \subset k \,\&\, b \subset k \rightarrow a \cup b \subset k.$$

对于 5.52 我们注意由 5.41, 5.43 有

$$a \cap b \subset a \longleftrightarrow (a \cap b) \cup a = a,$$
$$(a \cap b) \cup a = a \cup (a \cap b) = a.$$

同理

$$a \cap b \subset b.$$

又对于 5.53 我们要求证明

$$a \cap (a \cup b) = a,$$
$$b \cap (a \cup b) = b,$$

而这由 5.43 (及 5.41) 可以得到.

如果 $k \subset a$ 且 $k \subset b$, 则 $k \cap a = k$, 故

$$k \cap (a \cap b) = (k \cap a) \cap b = k \cap b = k,$$

这就证明了 5.54. 同理, 如果 $a \subset k$ 且 $b \subset k$, 则

$$(a \cup b) \cup k = a \cup (b \cup k) = a \cup k = k,$$

这就证得 5.55, 于是 5.50 证毕.

作为本节的结束, 我们注意, 在有零元素和单位元素 0, 1 的格中, 我们有

对于所有的 a, $0 \subset a$, $a \subset 1$, 故

$$a \cup 0 = a, \quad a \cap 0 = 0; \quad a \cup 1 = 1, \quad a \cap 1 = a.$$

5.6. 分 配 格

两个分配律

5.61. $$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c),$$

5.62. $$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$$

能成立的格称为**分配格**.

例如, 如第一章我们见到的, 一个已给集合的所有子集的格是分配的. 但由下面的顺序图所给出的格却不是分配的,

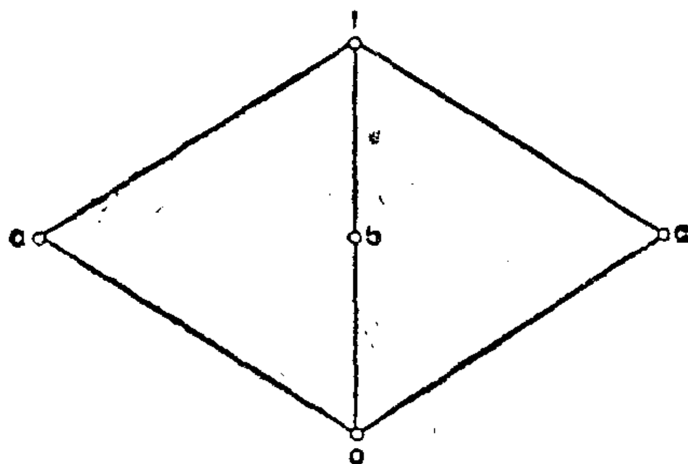


图 11

这是因为 $a \cup (b \cap c) = a$ 而

$$(a \cup b) \cap (a \cup c) = 1 \cap 1 = 1.$$

在分配格中，两个方程

$$a \cap b = a \cap c, \quad a \cup b = a \cup c$$

蕴涵

$$b = c.$$

这是因为

$$b = b \cup (a \cap b) = b \cup (a \cap c) = (b \cup a) \cap (b \cup c)$$
$$= (a \cup c) \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup c = (a \cap c) \cup c = c.$$

分配格（具有单位元素）也可以不用交换律，结合律和吸收律，而用公理 5.61 及下列公理来刻划：

5.621. $$(b \cup c) \cap a = (b \cap a) \cup (c \cap a).$$

5.63. $$a \cap a = a.$$

存在一个元素 1，使得

5.64. $$a \cup 1 = 1 \cup a = 1,$$

5.65. $$a \cap 1 = 1 \cap a = a,$$

我们首先证明 5.63 的对偶，即 $a \cup a = a$；事实上

$$a = a \cap 1 = a \cap (a \cup 1) = (a \cap a) \cup (a \cap 1) = a \cup a.$$

对于吸收律，我们有

$$(a \cap b) \cup a = (a \cap b) \cup (a \cap 1) = a \cap (b \cup 1) = a \cap 1 = a$$

及

$$a \cup (a \cap b) = (a \cap 1) \cup (a \cap b) = a \cap (1 \cup b) = a \cap 1 = a,$$

类似地还有

$$a \cup (b \cap a) = (b \cap a) \cup a = a.$$

对于第二吸收律，我们有

$$a \cap (a \cup b) = (a \cap a) \cup (a \cap b) = a \cup (a \cap b) = a$$

及

$$a \cap (b \cup a) = (a \cap b) \cup (a \cap a) = (a \cap b) \cup a = a,$$
$$(a \cup b) \cap a = (a \cap a) \cup (b \cap a) = a \cup (b \cap a) = a,$$
$$(b \cup a) \cap a = (b \cap a) \cup (a \cap a) = (b \cap a) \cup a = a.$$

现在我们可以根据吸收律来证明交换律 $a\cup b=b\cup a$.
我们有

$$\begin{aligned} a\cup b &= [a\cap(b\cup a)]\cup[b\cap(b\cup a)] \\ &= (a\cup b)\cap(b\cup a) && \text{(由 5.621)} \\ &= [(a\cup b)\cap b]\cup[(a\cup b)\cap a] \\ &= b\cup a. && \text{(由吸收律)} \end{aligned}$$

下一步我们证明吸收律的某些推广形式:

$$a\cap[(a\cup b)\cup c]=a,$$
$$b\cap[(a\cup b)\cup c]=b,$$
$$c\cap[(a\cup b)\cup c]=c^{*}.$$

对于第一个,我们有

$$\begin{aligned} a\cap[(a\cup b)\cup c] &= [a\cap(a\cup b)]\cup(a\cap c) \\ &= a\cup(a\cap c)=a, \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned} b\cap[(a\cup b)\cup c] &= [b\cap(a\cup b)]\cup(b\cap c) \\ &= b\cup(b\cap c)=b, \\ c\cap[(a\cup b)\cup c] &= [c\cap(a\cup b)]\cup(c\cap c) \\ &= [c\cap(a\cup b)]\cup c=c. \end{aligned}$$

现在可得关于并的结合律,因为

$$\begin{aligned} a\cup(b\cup c) = {} & \{a\cap[(a\cup b)\cup c]\} \\ & \cup(\{b\cap[(a\cup b)\cup c]\} \\ & \cup\{c\cap[(a\cup b)\cup c]\}) \\ = {} & \{a\cap[(a\cup b)\cup c]\} \\ & \cup\{(b\cup c)\cap[(a\cup b)\cup c]\}, \\ & && \text{(由 5.621)} \end{aligned}$$

5.66. $\quad = [a\cup(b\cup c)]\cap[(a\cup b)\cup c],$ (再由 5.621)

---

* 根据代替法则,此式可直接由吸收律 $a\cap(b\cup a)=a$ 得出,故下面的证明是多余的. ——译者注

下一步我们注意吸收律的下列推广形式可用相同的方法来证明:

$$[a \cup (b \cup c)] \cap a = a,$$
$$[a \cup (b \cup c)] \cap b = b,$$
$$[a \cup (b \cup c)] \cap c = c.$$

由这些式子我们有

$$\begin{aligned} a \cup b &= \{[a \cup (b \cup c)] \cap a\} \\ &\quad \cup \{[a \cup (b \cup c)] \cap b\} \\ &= [a \cup (b \cup c)] \cap (a \cup b), \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} (a \cup b) \cup c &= \{[a \cup (b \cup c)] \cap (a \cup b)\} \\ &\quad \cup \{[a \cup (b \cup c)] \cap c\}, \end{aligned}$$

5.67. $$= [a \cup (b \cup c)] \cap [(a \cup b) \cup c]$$

于是由 5.66, 5.67 我们就证明了并的结合律:

$$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c.$$

现在来证明第二分配律. 我们有

$$\begin{aligned} (a \cup b) \cap (a \cup c) &= [a \cap (a \cup c)] \cup [b \cap (a \cup c)] \quad (\text{由 } 5.621) \\ &= a \cup [b \cap (a \cup c)] \\ &= a \cup [(b \cap a) \cup (b \cap c)] \quad (\text{由 } 5.61) \\ &= [a \cup (b \cap a)] \cup (b \cap c) \\ &= a \cup (b \cap c). \end{aligned}$$

这就证得 5.62 (并的交换律表明

$$(b \cap c) \cup a = (b \cup a) \cap (c \cup a)).$$

对于交的交换律,现在我们有

$$\begin{aligned} a \cap b &= [a \cup (b \cap a)] \cap [b \cup (b \cap a)] \\ &= (a \cap b) \cup (b \cap a) \\ &= [(a \cap b) \cup b] \cap [(a \cap b) \cup a] \\ &= b \cap a. \end{aligned}$$

最后，关于交的结合律的证明可由在并的结合律的证明中简单地交换并与交而得到．这就完成了公理 5.61，5.621，5.63，5.64，5.65 确定一个具有单位元素的分配格的证明．

5.7. 有补分配格、并理想与交理想、格-并

如果在一个具有零元素和单位元素的格中，对于每一个元素 x 都有一个元素 x' 与之对应，使得

$$x \cap x' = 0, \quad x \cup x' = 1$$

则这个格称为**有补的**.

如果格是分配的，则 x 的补是唯一的，因为如果 x 有两个补 x' 与 X，则我们有

$$x \cap x' = x \cap X = 0,$$
$$x \cup x' = x \cup X = 1.$$

因为格是分配的，故由此有 $X = x'$，于是补是唯一的.

一个有补的分配格是一个布尔代数，反之亦成立，因为二者都封闭于两个运算 $\cap$，$\cup$，这两个运算是交换的，结合的，且每个对于另一个都是分配的；此外，在每一个中都有唯一的元素 0，1，又在二者中，每一元素 x 都有唯一的补 x' 使得

$$x \cup x' = 1, \quad x \cap x' = 0,$$

及

$$x \cup 0 = x, \quad x \cap 1 = x.$$

5.71. 格 K 的一个（非空）子集 $I_\cup$ 称为格的一个**并理想**，如果对于 $I_\cup$ 的任何 a，b，$a \cup b$ 属于 $I_\cup$，且对于 K 中的任何 k，$a \cap k$ 属于 $I_\cup$．即

$$a \in I_\cup \,\&\, b \in I_\cup \rightarrow a \cup b \in I_\cup$$

及

$$a \in I_\cup \,\&\, k \in K \rightarrow a \cap k \in I_\cup.$$

换句话说，理想的元素对于并是封闭的，且理想的一个成员与格的任一个成员的交是理想的一个成员.

格K的一个（非空）子集$\mathscr{I}_\cap$称为一个**交理想**，如果对于$\mathscr{I}_\cap$的任何a, b, $a\cap b$属于$\mathscr{I}_\cap$，且对于K中的任何k, $a\cup k$属于$\mathscr{I}_\cap$.

用符号表示为

$$a\in\mathscr{I}_\cap \;\&\; b\in\mathscr{I}_\cap \rightarrow a\cap b\in\mathscr{I}_\cap,$$
$$a\in\mathscr{I}_\cap \;\&\; k\in K \rightarrow a\cup k\in\mathscr{I}_\cap.$$

5.72. 设I是格K的一个对并运算封闭的非空子集，则当且仅当I包含I的每个成员所包含的一切元素时，I是一个并理想. 即，如果I对并运算封闭，且

$$a\in I \;\&\; b\subset a\rightarrow b\in I,$$

则I是一个并理想.

因为当a包含在一个理想中时，如果$b\subset a$，则$b=a\cap b$，而$a\cap b$包含在一个并理想中. 反之，如果

$$a\in I \;\&\; b\subset a\rightarrow b\in I,$$

且如果k是K的任意元素，则$a\cap k\subset a$，故$a\cap k\in I$，这就证明了I是一个并理想.

5.73. 设I是格K的一个非空子集，则当且仅当

$$a\in I \;\&\; b\in I \longleftrightarrow a\cup b\in I$$

时，I是一个并理想. 这个等价关系的一半已包含在并理想的定义中，如果I是一个并理想，由于

$$a\cup b\in I \text{ 及 } a=(a\cup b)\cap a,$$

故

$$a\in I,$$

同理

$$b\in I.$$

剩下所要证明的是，一个子集如果对于并运算是封闭的，而且

仅当它包含 a, b 二者时才包含 $a \cup b$, 则这个子集是并理想.

设 k 是 K 的任一个成员，则我们必须证明 k 与子集 I 的任一个成员 a 的交仍是这子集的一个成员. 事实上,

$$a = (a \cap k) \cup a$$

因此，由于 a 本身属于 I, 所以 $a \cap k$ 属于 I, 而这就是所要证明的.

5.74. 5.72 的对偶命题是：如果 $\mathscr{I}$ 是对交运算封闭的非空子集，则当且仅当任何包含 $\mathscr{I}$ 的一个成员元素都被 $\mathscr{I}$ 包含，即

5.741. $$a \in \mathscr{I} \;\&\; a \subset b \rightarrow b \in \mathscr{I}.$$

时，$\mathscr{I}$ 是一个交理想.

因为如果 $a \subset b$, 则 $b = a \cup b$, 所以如果 $\mathscr{I}$ 是一个交理想，且 $a \in \mathscr{I}$, 则 $b \in \mathscr{I}$. 反之，如果 $\mathscr{I}$ 对于交运算是封闭的，且满足 5.741, 又如果 $a \in \mathscr{I}$, 且 k 是 K 的任一个成员，则

$$a \subset a \cup k,$$

故 $a \cup k \in \mathscr{I}$, 因而 $\mathscr{I}$ 是一个交理想.

5.75. 5.73 的对偶为，设 $\mathscr{I}$ 是格 K 的一个非空子集，则当且仅当

5.751. $$a \in \mathscr{I} \;\&\; b \in \mathscr{I} \longleftrightarrow a \cap b \in \mathscr{I}$$

时，$\mathscr{I}$ 是一个交理想.

如果 $\mathscr{I}$ 是一个交理想，则

$$a \in \mathscr{I} \;\&\; b \in \mathscr{I} \rightarrow a \cap b \in \mathscr{I};$$

又如果 $a \cap b \in \mathscr{I}$ 则因 $a = (a \cap b) \cup a$, 故 $a \in \mathscr{I}$, 同理有 $b \in \mathscr{I}$. 反之，如果 $\mathscr{I}$ 是满足 5.751 的一个子集，则 $\mathscr{I}$ 对于交运算是封闭的，又如果 k 是 K 的任一元素，a 是 $\mathscr{I}$ 的任一元素，则因为

$$(a \cup k) \cap a = a,$$

由此就有 $a \cup k \in \mathscr{I}$, 故 $\mathscr{I}$ 是一个交理想.

5.76. 格的理想本身是一个格，因为理想对于格的包含关系是

半序的，又当 a, b 属于理想时，$a \cup b$, $a \cap b$ 都属于理想(不论这理想是交理想或并理想).

5.77. 格 L 的并理想的集合是一个格 在这个格中两个理想的格-交正好是它们的共同部分，而两个理想 A, B 的格-并则是包含在 A 的一个元素与 B 的一个元素的并之中的 L 的元素的集合.

我们首先注意，两个并理想 A, B 的共同部分是一个并理想，因为如果 $a \in A \cap B$, $b \in A \cap B$, 则因为 a, b 属于 A, B, 所以 $a \cup b$ 属于 A, B 两者，因而属于它们的共同部分；又如果 c 是 L 的任一个元素，则 $a \cap c$ 属于 A 及 B, 故属于它们的共同部分. $A \cap B$ 自然是包含在 A 与 B 中的最大理想.

下一步我们证明，如果 k 是 L 的这样的元素，使得对于 A 的一个元素 a 及 B 的一个元素 b 有 $k \subset a \cup b$, 则所有这样的 k 的集合 K 是 L 中的一个并理想. 这是因为如果 $k_1 \in K$ 及 $k_2 \in K$, 则存在 A 的元素 a_1, a_2 及 B 的元素 b_1, b_2, 使得

$$k_1 \subset a_1 \cup b_1, \quad k_2 \subset a_2 \cup b_2,$$

所以

$$k_1 \cup k_2 \subset (a_1 \cup b_1) \cup (a_2 \cup b_2) = (a_1 \cup a_2) \cup (b_1 \cup b_2);$$

因为 $a_1 \cup a_2 \in A$ 及 $b_1 \cup b_2 \in B$, 所以 $k_1 \cup k_2 \in K$. 此外，如果 $k \in K$, $d \subset k$ 则对于某个 $a \in A$ 及某个 $b \in B$, 有 $d \subset a \cup b$, 故 $d \in K$, 这就证明了 K 是并理想. 因为对于任何 $a \in A$ 及 $b \in B$ 都有 $a \subset a \cup b$ 及 $b \subset a \cup b$, 所以 $a \in K$, $b \in K$, 故 $A \subset K$ 及 $B \subset K$. 如果我们用 $A \uplus B$ 来表示两个理想 A, B 的(如刚才所定义的)**格-并**(以避免与集并相混淆)，则我们必须证明格公理满足. 因为我们所取的格-交恰好是集合的交，故对于交的交换律与结合律必然满足. 又因为 $a \cup b = b \cup a$, 故我们有 $A \uplus B = B \uplus A$. 我们来证明结合律

$$(A \uplus B) \uplus C = A \uplus (B \uplus C).$$

如果 x 是 L 的这样的元素，使得 $x \subset k \cup c$，此处 $c \in C$，又对于某个 $a \in A$, $b \in B$ 有 $k \subset a \cup b$，则$(A \uplus B) \uplus C$ 是所有这样的 x 的集合．于是因为 $x \subset a \cup (b \cup c)$，故 $x \subset a \cup l$，此处 $l = b \cup c$，因此 $l \in B \uplus C$，这就证明了 $x \in A \uplus (B \uplus C)$．同理，$A \uplus (B \uplus C)$ 的任一个成员是 $(A \uplus B) \uplus C$ 的一个成员，这就完成了结合律的证明．

剩下所要证明的是两个吸收律

$$A \cap (A \uplus B) = A, \quad A \uplus (A \cap B) = A.$$

对于第一个吸收律，我们注意，$A \subset A \uplus B$，故 $A \subset A \cap (A \uplus B)$；因为必然有 $A \cap (A \uplus B) \subset A$，故第一个方程成立．对于第二个，我们首先注意 $A \subset A \uplus (A \cap B)$；又如果 $x \in A \uplus (A \cap B)$，则对于某个 $a \in A$, $u \in A \cap B$ 有 $x \subset a \cup u$．因为 a, u 两者都属于并理想 A，故 $a \cup u$ 属于 A，从而 x 属于 A，这就完成了第二吸收律的证明．

5.78. 如果 L 是一个分配格，则两个理想 A, B 的格-并 $K = A \uplus B$ 等于所有 $a \cup b$ 的集 U，其中 $a \in A$, $b \in B$．这是因为 $a \cup b \subset a \cup b$，所以 $U \subset K$；又如果 $x \in K$，则对于某些 $a \in A$, $b \in B$ 有 $x \subset a \cup b$，故

$$x = x \cap (a \cup b) = (x \cap a) \cup (x \cap b) = a_1 \cup b_1,$$

其中 $a_1 = x \cap a$, $b_1 = x \cap b$，故 $a_1 \in A$, $b_1 \in B$，所以 $x \in U$，这就证明了 $U = K$．

5.79. 如果 L 是一分配格，则 L 的理想的格也是分配的．

设 A, B, C 是 L 中的理想，则我们必须证明

5.791. $\quad A \cap (B \uplus C) = (A \cap B) \uplus (A \cap C)$,

5.792. $\quad A \uplus (B \cap C) = (A \uplus B) \cap (A \uplus C)$.

对于 5.791 只须证明包含关系

$$A \cap (B \uplus C) \subset (A \cap B) \uplus (A \cap C)$$

就足够了，因为相反的包含关系

$$(A \cap B) \uplus (A \cap C) \subset A \cap (B \uplus C)$$

在任何格中成立(见习题 V, 1 (11)).

设 $a \in A \cap (B \uplus C)$, 则 $a \in A$, 且对于某些 $b \in B$, $c \in C$ 有 $a = b \cup c$, 因此

$$a = a \cap a = a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c),$$

如前面所证明过的*, 由此可知 a 属于

$$(A \cap B) \uplus (A \cap C).$$

第二分配律可由第一分配律得到(见习题 V, 2).

5.8. 布尔代数的表示定理与牛曼代数

5.80. 任何有限布尔代数 $\mathscr{B}$ 同构于这个代数的原子的集合的所有子集的代数. 我们回忆, 半序集合的原子是一个元素 $a \neq 0$, 它仅包含 0 与 a 本身. 我们仅在证明 $\mathscr{B}$ 具有原子时用到 $\mathscr{B}$ 的有限性(无限布尔代数可能没有原子, 这是我们的下一个结果的推论).

考虑任一个元素 $b \neq 0$, 则必有一个原子包含在 b 中. 这是因为或者 b 是一个原子或者存在一个非零元素 b_1 包含在 b 中且 $b \neq b_1$; 或 b_1 是一个原子或者存在一个非零元素 b_2 包含在 b_1 中且 $b_2 \neq b_1$; 或者 b_2 是一个原子或者它包含一个元素 b_3, 等等. 因为 $\mathscr{B}$ 是有限的, 故序列必须终止于包含在 b 中的某个原子 b_k.

原子将 $\mathscr{B}$ 的元素分成两个不相交的集合, 因为如果 a 是一原子而 b 是 $\mathscr{B}$ 的任一元素, 则 a 或者包含在 b 中, 或者包含在 b' 中(但不同时包含在两者之中, 因为由 $a \subset b$ 及 $a \subset b'$ 有 $b \subset a'$, 故 $a \subset a'$, 即 $a = a \cap a' = 0$). 因为 $a \cap b \subset a$,

* 指 5.78.——译者注

又 a 是一个原子，故或 $a \cap b = 0$（即 $a \subset b'$）或 $a \cap b = a$，故 $a \subset b$。

令 $A(b)$ 表示 $\mathscr{B}$ 的所有包含在 b 中的原子的集合．我们将证明形如 $A(b)$ 的集合正好构成原子集合的子集（即每个子集都是集 $A(b)$ 中的一个）．我们首先证明，对于任何元素 b, c，有

$$A(b \cup c) = A(b) \cup A(c).$$

设 a 是集合 $A(b \cup c)$ 的一个原子，故 $a \subset b \cup c$；于是 $a \subset b$ 或 $a \subset c$，故 a（至少）包含在集合 $A(b)$，$A(c)$ 的一个之中，因而包含在它们的并之中．反之，如果 $a \in A(b) \cup A(c)$，则或者 $a \in A(b)$，或者 $a \in A(c)$，即或者 $a \subset b$ 或者 $a \subset c$，故 $a \subset b \cup c$，即 $a \in A(b \cup c)$．下一步我们注意，如果 a 是一个原子，则 $A(a)$ 只有一个成员 a．现在考虑原子集合的任一子集 $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$，并令 $b = a_1 \cup a_2 \cup \cdots \cup a_k$．则

$$\begin{aligned} A(b) &= A(a_1) \cup A(a_2) \cup \cdots \cup A(a_k) \\ &= (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k). \end{aligned}$$

这样原子集合的每一个子集可以表为 $A(b)$ 的形式．b 与 $A(b)$ 之间是一一对应的，因为如果 $b \neq c$，则或者 b 不包含在 c 中，或者 c 不包含在 b 中（因为 $c \subset b \;\&\; b \subset c \rightarrow b = c$）；设 b 不包含在 c 中，则 $b \cap c' \neq 0$，故存在一个原子 a 包含在 $b \cap c'$ 中，因而包含在 b，c' 两者之中（因而不包含在 c 中），由此有 $a \in A(b)$ 及 $a \notin A(c)$ 故 $A(b) \neq A(c)$．

最后我们证明 b 与 $A(b)$ 之间的对应是一个同构．我们已经见到，$A(b \cup c) = A(b) \cup A(c)$，故并运算在这对应中被保持．剩下所要证明的是 $A(b')$ 是 $A(b)$ 的（在原子集合中的）补．事实上，$a \in A(b') \longleftrightarrow a$ 不包含在 b 中 $\longleftrightarrow a \notin A(b) \longleftrightarrow a$ 包含在 $A(b)$ 的补中，这就是所要证明的．

因为 n 个元素的所有子集所成的集合恰有 2^n 个元素（因

为对于每个子集，每一元素或者包含在这子集中或者不包含在这子集中)，故有限布尔代数元素的数目是2的某一次幂．

5.81. 无限布尔代数同构于一个集合的所有子集的集合这一命题并不正确．但我们有斯通(Stone)定理：**一个无限布尔代数同构于一个集合的子集的某个族．**下面我们来证明这个定理．我们将看到在前证明中原子的地位将被某些理想所代替．因为在证明中我们仅涉及一种理想，即并理想，故我们将简称之为理想，而免去限制词“并”．我们考虑布尔代数 $\mathscr{B}$ 的所有不包含1的理想的集合 $\mathscr{S}$．$\mathscr{S}$ 的元素是 $\mathscr{B}$ 的子集，因此它们被包含关系所半序化；对于这个半序关系，$\mathscr{S}$ 可能具有极大元素，我们将称 $\mathscr{S}$ 的极大元素为**极大理想．**为了保证极大理想的存在，我们不得不引入一个极为著名的公理，这个公理是独立于我们已经使用过的所有其它集合公理之外的．所述的公理，按照 M. 佐恩 (M. Zorn) 所给的形式，是

如果一个半序集合中的每一个链都有一个上界，则这个集合必有一个极大元素．

已经知道，这个公理是与**选择公理**等价的，后者说的是：一个集合 S 的、不包含空集合在内的、所有子集的类，可以用这样一种方法映射到 S 之中，使得每个子集 B 的映象属于 B；或者等价地说，对于任一无公共元素的集合的族 F，存在恰好包含族中的每个集合的一个成员的集合．

设 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{S}$ 中的任一链，作集合 $\mathscr{A}$，它是由属于 $\mathscr{C}$ 中的某个理想的一切元素构成的．即 $\mathscr{B}$ 的一个元素属于 $\mathscr{A}$ 的充分必要条件是：在链 $\mathscr{C}$ 中有一个理想包含这个元素．如果 I 是 $\mathscr{C}$ 中的任一个理想，则 I 的每一个成员是 $\mathscr{A}$ 的一个成员，故 I 包含在 $\mathscr{A}$ 中，因此 $\mathscr{A}$ 是理想的链 $\mathscr{C}$ 的一个上界．此外，$\mathscr{A}$ 本身是一个理想，因为如果 a 与 b 属于 $\mathscr{A}$，则存在 $\mathscr{C}$ 的理想 I, J，使得 $a \in I$, $b \in J$．因为 $\mathscr{C}$ 是一个链，

故 I 与 J 中的一个包含另一个，因而 a 与 b 为同一理想中的元素，所以这个理想也包含 $a\cup b$；因为 $a\cup b$ 属于 $\mathscr{C}$ 的一个理想，故 $a\cup b$ 属于 $\mathscr{A}$. 此外，如果 k 是 $\mathscr{B}$ 的任一成员，因为 I 是一个理想，故 $a\cap k$ 属于 I 因而属于 $\mathscr{A}$. 于是 $\mathscr{A}$ 是一个理想. 最后我们注意，由于1不属于 $\mathscr{S}$ 中的任何理想，故不属于 $\mathscr{A}$，这就证明了 $\mathscr{A}$ 是集合 $\mathscr{S}$ 的一个理想. 这样 $\mathscr{S}$ 中的每一个链在 $\mathscr{S}$ 中都有一个上界，故由佐恩公理，$\mathscr{S}$ 有一极大元素.

考虑由包含某个给定的理想 $\mathscr{S}_0$ 的所有理想所组成的 $\mathscr{S}$ 的一个子集，我们注意到，由上面的证明即可确定一个包含 $\mathscr{S}_0$ 的极大理想. 特别地，我们由此可以找到包含任一选定元素 $b\neq 1$ 的极大理想，因为我们能找到一个包含理想 (b) 的极大理想，而 (b) 是由 $\mathscr{B}$ 的满足 $x\subset b$ 的所有元素 x 构成的.

极大理想将 $\mathscr{B}$ 的元素分成两个不同的集合；给定一个极大理想 P 以及 $\mathscr{B}$ 的任一元素 b，则或者 $b\in P$ 或者 $b'\in P$. 设 $b\notin$*P，并考虑所有形如 $x\cup p$ 的元素的集合 X，其中 p 是 P 的任一元素，x 是 $\mathscr{B}$ 的使得 $x\subset b$ 的任一元素. 我们将证明 X 是一理想. 这是因为如果 x_1, x_2 都包含在 b 中，又如果 p_1, p_2 是 P 的任两个元素，则

$$(x_1\cup p_1)\cup(x_2\cup p_2)=(x_1\cup x_2)\cup(p_1\cup p_2),$$

故 $(x_1\cup p_1)\cup(x_2\cup p_2)$ 是 X 的一个成员；又如果 b_1 是 $\mathscr{B}$ 的任一个成员，则 $(x_1\cup p_1)\cap b_1=(x_1\cap b_1)\cup(p_1\cap b_1)$,
因为 $x_1\cap b_1\subset x_1\subset b$, $p_1\cap b_1$ 属于 P，所以 $(x_1\cup p_1)\cap b_1$ 是 X 的一个成员，这就证明了 X 是一个理想. 设 p 是 P 的任一成员，因为 $p=(p\cap x)\cup p$，且当 $x\subset b$ 时，$p\cap x\subset b$ 故 P 属于 X，但因为 $b=b\cup 0$ 而 $b\subset b$, $0\in P$，故 $b\in X$，然

* 原书误为 $\in$.——译者注

而$b\notin P$，因此X不等于P．因为P是$\mathscr{S}$的一个极大元素，且$P\subset X$，故X是一个理想，而这个理想不是$\mathscr{S}$的一个成员，因此X是包含1的一个理想．但如果一个理想包含1，则对于$\mathscr{B}$的任一元素a，这个理想也包含$1\cap a=a$，所以事实上，$\mathscr{B}$本身是包含1的仅有的一个理想．于是$X=\mathscr{B}$，故每个元素a都可表成$x\cup p$的形式，其中$x\subset b$，$p\in P$．特别存在p使得$b\cup p=1$；但方程$b\cup p=1$要求$p=b'$*，这就证明了$b'\in P$．当然b与b'两者都属于P是不可能的，因为这样我们就会有$1=b\cup b'\in P$，即1是理想P的一个成员．

现在我们来考虑所有极大理想集合的子集的性质．设$M(x)$为所有使得$x'\in P$的极大理想P的集合．我们将证明，对于$\mathscr{B}$中的所有x，集$M(x)$的集合$\mathscr{E}$对于集合-交与补是封闭的．

两个集合$M(x)$与$M(y)$的交也是$\mathscr{E}$的一个成员；因为事实上$M(x)\cap M(y)=M(x\cap y)$．因为如果$P\in M(x\cap y)$，则P包含$(x\cap y)'=x'\cup y'$；但仅当x'与y'的每一个都属于P时，P才包含$x'\cup y'$，故P属于$M(x)$与$M(y)$两者，因而属于它们的交$M(x)\cap M(y)$．反之，如果P属于$M(x)$与$M(y)$两者，则x'与y'属于P，故$x'\cup y'=(x\cap y)'$属于P，因此$P\in M(x\cap y)$．$M(x)$在$\mathscr{E}$中的补为$M(x')$，因为

$$P\in M(x')\longleftrightarrow x\in P\longleftrightarrow P\notin M(x).$$

于是$\mathscr{E}$对于交与补是封闭的，故它构成一个布尔代数．

当且仅当$x=y$时，集合$M(x)$与$M(y)$相等；因为如果$x\neq y$，则或x不包含在y中，或y不包含在x中．不失一般性，我们可以设x不包含在y中，于是$x\cap y'\neq 0$，由此

---

* 根据3.21，由$b\cup p=1$仅可推出$p=b'\cup u$，此处u为$\mathscr{B}$的任意元素．今补充证明如下：

$b'=b'\cap 1=b'\cap(b\cup p)=(b'\cap b)\cup(b'\cap p)=b'\cap p\in P$．——译者注

$x'\cup y\neq 1$，故存在一个包含 $x'\cup y$ 因而包含 x' 与 y 两者的极大理想 P. 因为 $x'\in P$, 故 $P\in M(x)$，又因为 $y\in P$，故 $P\in M(y')$；于是 P 属于 $M(x)$ 而不属于 $M(y)$，这就证明了 $M(x)\neq M(y)$.

现在由此可得，$\mathscr{B}$ 同构于 $\mathscr{E}$；因为在 x 与 $M(x)$ 之间存在一个一一对应，在这个对应下，$x\cap y$ 对应的是 $M(x\cap y)=M(x)\cap M(y)$，x' 对应的是 $M(x)$ 在 $\mathscr{E}$ 中的补 $M(x')$.

于是我们就证明了斯通定理：每个布尔代数同构于极大理想集合的一族子集的代数.

一般地说，$\mathscr{E}$ 并不包含极大理想的集合的所有子集，因为如果 $\mathscr{B}$ 是无限时，则由斯通定理，极大理想的集合有无限多个子集，故极大理想的集合是无限的，容易证明，一个无限集合的所有子集是不可数的，因为设 S_1, S_2, S_3, $\cdots$是自然数 1，2，3，$\cdots$的集合的所有子集的一个编排，并构造子集 S 如下. 仅当 S_1 不包含 1 时 S 包含 1；仅当 S_2 不包含 2 时 S 包含 2，如此类推. 于是 S 是与 S_1, S_2, S_3, $\cdots$中的每一个都不相同的子集，故 S 是不包含在这个编排中的一个子集. 为了完成 $\mathscr{E}$ 一般不包含极大理想的集合的所有子集的证明，我们将证明存在可数的无限布尔代数.

考虑自然数的具有如下性质的所有子集的一个族 $\mathscr{F}$，这些子集或者是有限（包括空集），或者无限，如果无限的话，包含某个数以后的一切自然数(也可以包含其它的数).

例如 $\mathscr{F}$ 包含集合

$$\{1,2,3\},\ \{1,5,7,11\},\ \{21,22,23,\cdots\}$$

$$\{1,5,7,11,21,22,23,\cdots\}.$$

每个无限集合都是一个有限集合在自然数的集合中的补. 自然数的所有有限子集可以用如下的方法编排出来：将元素为

$$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_k$$

的集合排在第

$$2^{a_1-1}+2^{a_2-1}+\cdots+2^{a_k-1}$$

个位置上(例如,由于 $13=2^3+2^2+2^0$, 故在这个编排中的第十三个集合为 $\{1, 3, 4\}$). 如果我们用 $f_1, f_2, \cdots$ 来表示有限集的序列, 则无限集为 $f_1', f_2', \cdots$, 于是整个族 $\mathscr{F}$ 可编排为 $f_1, f_1', f_2, f_2', \cdots$.

为了证明 $\mathscr{F}$ 是集合的一个布尔代数,我们只需证明 $\mathscr{F}$ 对于交与补是封闭的. 因为无限集合是 $\mathscr{F}$ 中的有限集合的补, 反之亦成立, 故 $\mathscr{F}$ 对于补运算是封闭的. 此外, 两个有限集合的交是有限集合, $\mathscr{F}$ 中的两个无限集合的交是 $\mathscr{F}$ 中的无限集合, 最后, 有限集合与无限集合之交是有限集合, 故 $\mathscr{F}$ 对于交运算也是封闭的.

5.82. 牛曼 (Newman) 代数 由于放弃交换和结合公理而得到的布尔代数的一个推广称为牛曼代数. 在牛曼代数中我们有一个关于两个运算为封闭的集合 N, 这两个运算用 $a+b$ 与 ab 来表示,它们有以下各性质:

5.821. $a(b+c)=ab+ac$, $(a+b)c=ac+bc$.

5.822. 存在一个元素 1, 使得对于所有的 a 有 $a1=a$.

5.823. 存在一个元素 0 使得对于所有的 a 有

$$a+0=a=0+a.$$

5.824. 对于每个元素 a 至少有一个补 a' 与之对应,使得

$$aa'=0, \quad a+a'=1.$$

我们首先证明

5.83. $$aa=a.$$

5.84. $$(a')'=a.$$

对于 5.83, 我们有

$$aa=aa+0=aa+aa'=a(a+a')=a1=a.$$

对于 5.84，我们有

$$
\begin{aligned}
(a')' &= 0 + (a')'(a')' \\
&= a'(a')' + (a')'(a')' = (a' + (a')')(a')' \\
&= 1(a')' = (a + a')(a')' = a(a')' + 0 \\
&= 0 + a(a')' = aa' + a(a')' \\
&= a(a' + (a')') = a1 = a.
\end{aligned}
$$

由此有 $a'a = 0$ 及 $a' + a = 1$；也有

$$1a = a.$$

这是因为

$$1a = (a + a')a = aa + a'a = a + 0 = a.$$

由此我们容易证明补是唯一的；因为如果 a' 与 a^* 都是 a 的补，则

$$
\begin{aligned}
a^* &= a^*1 = a^*(a' + a) = a^*a' + a^*a \\
&= a^*a' + 0 = a^*a' + aa' = (a^* + a)a' \\
&= 1a' = a'.
\end{aligned}
$$

因为 $1 + 0 = 1$，又补是唯一的，故 $0 = 1'$，$0' = 1$.

下一步我们注意，对于所有的 a 有 $a0 = 0 = 0a$. 这是因为

$$0 = aa' = a(a' + 0) = aa' + a0 = 0 + a0 = a0,$$

又

$$0 = bb' = (0 + b)b' = 0b' + bb' = 0b' + 0 = 0b',$$

如果对于任何 a 取 $b = a'$，则 $b' = a$，于是我们有

$$0a = 0.$$

如果 $0 = 1$，则对于任何 a 有

$$0 = 0 + 0 = 0 + a0 = 0 + a1 = a1 = a,$$

故我们总假定 $0 \neq 1$.

5.85. 如果我们定义 $2 = 1 + 1$，则

$$2 + 2 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2(1 + 1) = 2 \cdot 2 = 2.$$

我们称 2 的左倍数 $a2$ 为**偶元素**．当且仅当 $a+a=a$ 时，元素 a 是偶的，因为如果 $a=b2$，则 $a+a=b(2+2)=b2$，又如果 $a+a=a$，则

$$a=a+a=a1+a1=a(1+1)=a2,$$

故 a 是偶的．这样**偶元素的加法是等幂的．**

任何偶元素的任何左或右倍数是偶的，因为如果 a 是偶的，则 $a=a+a$，于是

$$ab=(a+a)b=ab+ab,$$

故 ab 是偶的，又

$$ba=b(a+a)=ba+ba,$$

故 ba 是偶的，下一步我们注意

5.851. $(a+b)2=a2+b2$，$(ab)2=(a2)(b2)$，$(a2)2=a2$，所以偶元素集合对加法和乘法是封闭的．

上式的第一个正是分配律的一个例子．对于第二式我们有

$$\begin{aligned}(a2)(b2)&=(a+a)(b+b)\\&=(a+a)b+(a+a)b\\&=(ab+ab)+(ab+ab)\\&=(ab)2+(ab)2\\&=(ab)2,\end{aligned}$$

对于第三式

$$(a2)2=a2+a2=a(2+2)=a2.$$

此外，如果 a 是偶的，则

$$\begin{aligned}a+1&=(a+1)1=(a+1)(a+a')\\&=(aa+a)+(aa'+a')\\&=(a+a)+(0+a')\\&=a+a'=1.\end{aligned}$$

同理 $1+a=1$．所以

$$a2 + 2 = a2 + 1 \cdot 2 = (a + 1)2 = 1 \cdot 2 = 2;$$

又类似 $2 + a2 = 2$.

现在我们注意，如果以加法作为并，以乘法作为交，则偶元素满足公理 5.61, 5.621, 5.63, 5.64 与 5.65，因而偶元素构成一个以 2 为单位元素的分配格；在这个格中 $a'2$ 是 $a2$ 的补：因为 $a2 + a'2 = (a + a')2 = 2$ 及 $(a2)(a'2) = (aa')2 = 0$，又 2 的补为 0. 于是偶元素构成一个有补的分配格，即布尔代数.

5.86. 作为结束，我们来证明牛曼代数的加法既是可交换的也是可结合的.

我们首先注意

5.87. 如果 $a + b = 0$，则 $a = b$ 且 $b + a = 0$. 因为

$$\begin{aligned} a &= a(b' + b) = ab' + ab = (ab' + bb') + ab \\ &= (a + b)b' + ab = 0b' + ab = ab, \end{aligned}$$

又

$$b = (a' + a)b = (a'a + a'b) + ab = ab,$$

故

$$a = b \text{ 且 } b + a = a + b = 0.$$

5.88. 对于任何 a, b，设 $c = (a + b)'$ 及 $d = (b + a)'$，则

$$\begin{aligned} a + b &= (a + b)1 = (a + b)(d + d') \\ &= (a + b)d + c'd'; \end{aligned}$$

但 $0 = (b + a)d = bd + ad$，故由 5.87

$$(a + b)d = ad + bd = 0,$$

所以

$$a + b = c'd'.$$

同理

$$\begin{aligned} b + a &= 1(b + a) = (c + c')(b + a) \\ &= c(b + a) + c'd'; \end{aligned}$$

但 $0 = c(a+b) = ca + cb$，故 $c(b+a) = cb + ca = a$，所以

$$b + a = c'd'$$

这就证明了

$$a + b = b + a.$$

5.89. 我们分三步来证明结合律，首先证明这个定律的两个特殊情况．在每个证明中所用的方法是通过证明 $al = ar$ 及 $a'l = a'r$ 来建立方程 $l = r$：

$$l = (a' + a)l = a'l + al = a'r + ar = (a' + a)r = r.$$

我们所考虑的第一种情况是

5.891. $$1 + (1 + a) = (1 + 1) + a;$$

将这个方程的左、右两边分别写为 l 与 r，我们有

$$al = a + a(1 + a) = a + (a + a) = (a + a) + a \quad (由\ 5.88)$$
$$= ar.$$

又

$$a'l = a' + a'(1 + a) = a' + a' = a'r,$$

这就证明了 5.891．下一步我们考虑

5.892. $$1 + (a + b) = (1 + a) + b;$$

仍用 l, r 来表示这个方程的左、右两边，则

$$al = a + a(a + b) = a + (a + ab) = a[1 + (1 + b)]$$
$$= a[(1 + 1) + b] \quad (由\ 5.891)$$
$$= (a + a) + ab = ar,$$

又

$$a'l = a' + a'(a + b) = a' + a'b = a'r,$$

这就证明了 5.892.

最后，用 l 表示 $a + (b + c)$，用 r 表示 $(a + b) + c$，我们有

$$al = a[a+(b+c)] = a + a(b+c)$$
$$= a[1+(b+c)]$$
$$= a[(1+b)+c] \quad (由\ 5.892)$$
$$= ar,$$

又

$$a'l = a'(b+c) = a'[(a+b)+c] = a'r,$$

故 $l = r$，即

$$a+(b+c) = (a+b)+c.$$

习　　题　　V

1. 证明在任何格中有

(1) $a \cap a = a \cup a = a$;

(2) $a \cap b = a \longleftrightarrow a \cup b = b$;

(3) $a \cap b = a \cup b \rightarrow a = b$;

(4) $a \cap b \cap c = a \cup b \cup c \rightarrow a = b = c$;

(5) $c \subset a \,\&\, c \subset b \rightarrow c \subset a \cap b$;

(6) $a \subset c \,\&\, b \subset c \rightarrow a \cup b \subset c$;

(7) $a \subset b \rightarrow a \cap c \subset b \cap c$;

(8) $a \subset b \rightarrow a \cup c \subset b \cup c$;

(9) $a \subset b \,\&\, c \subset d \rightarrow a \cap c \subset b \cap d$;

(10) $a \subset b \,\&\, c \subset d \rightarrow a \cup c \subset b \cup d$;

(11) $(a \cap b) \cup (a \cap c) \subset a \cap (b \cup c)$;

(12) $a \cup [(a \cup b) \cap (a \cup c)] = (a \cup b) \cap (a \cup c)$.

2. 证明，在格中，如果一个分配律成立，则另一分配律也成立.

3. 设 $a \rightarrow \bar{a}$ 是格 L 到格 $\bar{L}$ 上的一个映射，如果

$$a \subset b \rightarrow \bar{a} \subset \bar{b},$$

则称这映射为格同态；如果

$$\overline{a \cup b} = \bar{a} \cup \bar{b} \quad (\overline{a \cap b} = \bar{a} \cap \bar{b}),$$

则称这映射为并(交)同态.

证明并(交)同态是格同态.

4. 对于一个固定的元素 k, 证明映射

$$a \to a \cap k, \quad a \to a \cup k$$

是格同态.

5. 一个格如果每个元素的集合有一个最小上界及最大下界, 则称为是完备的. 证明完备格到它自身上面的同态映射至少使一个元素不变.

6. 证明在任何格中

$$(a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a) \subset (a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a).$$

7. 证明当且仅当

$$(a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a) = (a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a)$$

时,格是分配的.

8. 证明在一个分配格中有

$$a \cap x = a \cap y \ \& \ a \cup x = a \cup y \to x = y.$$

9. 如果 k 是格 L 的一个固定元素, 证明包含于 k 的元素的集合构成一个并理想, 这个理想称为由 k 生成的主理想, 并记之为 (k). 证明在有限格中每一个理想是主理想.

10. 如果 J 是正整数的集合,又如果对于所有的正整数 m, n, 我们定义 $m \cap n$ 为 m, n 的最大公约数,定义 $m \cup n$ 为 m, n 的最小公倍数,证明 J 对于这两个运算为格.

11. 如果 (a) 与 (b) 是格 L 的理想的格中的主理想,证明

$$(a) \cap (b) = (a \cap b), \quad (a) \uplus (b) = (a \uplus b).$$

12. 证明格 L 到 L 的理想的格的主理想集合上的映射是一个同构.

13. 元素的集合 R 称为对于两个运算 $a + b$ 与 ab 成环,

如果对于所有的元素 a, b 来说, $a+b$ 与 ab 属于 R, 且

$$a+b=b+a, \quad a+(b+c)=(a+b)+c$$

$$(ab)c=a(bc),$$

$$a(b+c)=ab+ac, \quad (b+c)a=ba+ca$$

并且存在一个元素 0, 对于每个元素 a 存在一个对应的元素 $\bar{a}$ 使得

$$a+0=a, \quad a+\bar{a}=0.$$

如果 $ab=ba$, 则这个环称为是交换的,如果存在一个元素 1 使得 $a\cdot 1=1\cdot a=a$, 则这个环称为是具有单位元素的环. 布尔环是一个具有单位元素的环,且在其中 $aa=a$ 对于所有的元素成立. 证明在布尔环中 $a+a=0$, 且每个布尔环都是交换的.

14. 如果 a, b 是布尔环的元素,且如果

$$a\cap b=ab, \quad a\cup b=a+b+ab,$$

$$a'=a+1.$$

证明环的元素对于运算 $\cap$, $\cup$, $'$ 构成一布尔代数.

15. 证明布尔代数对于对称差和交是一布尔环.

16. 证明格

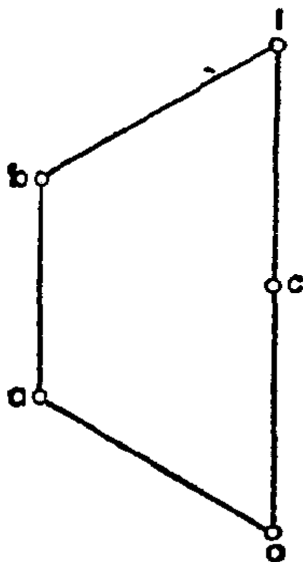


图 12

不是分配的，但下面两个格

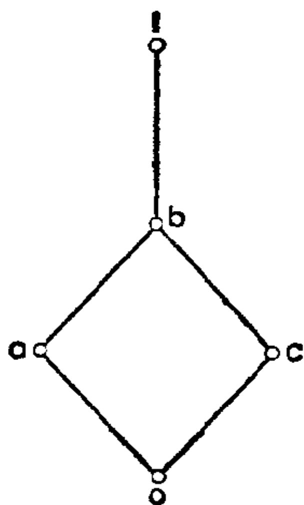


图 13

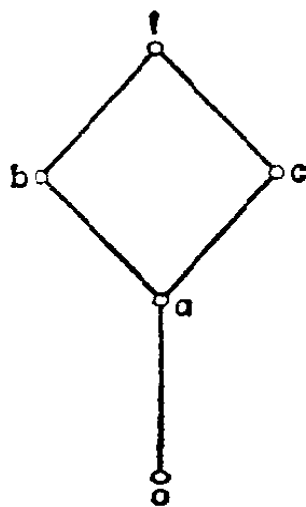


图 14

都是分配的.

习 题 解 答

习 题 I

1. $A' \cup B = 1$ 等价于 $(A' \cup B)' = 1$，即 $A \cap B' = 0$，由 1.85 它等价于 $A \subset B$.

2. $(A \cup B \cup C)' = [(A \cup B) \cup C]' = (A \cup B)' \cap C'$
$$= A' \cap B' \cap C'.$$
$$(A \cap B \cap C)' = [(A \cap B) \cap C]' = A' \cup B' \cup C'.$$
一般结果是
$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)' = A_1' \cap A_2' \cap \cdots \cap A_n',$$
$$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)' = A_1' \cup A_2' \cup \cdots \cup A_n',$$
(证明用归纳法).

3. 由 1.82，$X \subset A \cap A' = 0$；但 $0 \subset X$，因此 $X = 0$. 又 $1 = A \cup A' \subset X$，所以 $1 \subset X$；但 $X \subset 1$，这就证明了 $X = 1$. 若 $A \subset B$，则 $B = A \cup B$，又若 $C \subset D$，$D = C \cup D$，因此 $B \cup D = A \cup B \cup C \cup D = (A \cup C) \cup (B \cup D)$，这就证明了 $A \cup C \subset B \cup D$.

4. 事实上，$A \cap B \subset A$，$A \cap B \subset B$，又若 $A \cap B = 0$，则
$$A = A \cap (B \cup B') = (A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap B',$$
所以 $A \subset B'$；因此，如果 A 不包含于 B'，$A \cap B \neq 0$.

5. $A + B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$,
$$A' + B' = (A' \cap B) \cup (A \cap B').$$

6. 在两边加上K就作成 $A+K+K=B+K+K$, 由于 $K+K=0$, 就可得到结果.

同理, 由 $A+B=0$ 有 $A+B+B=B$, 即 $A=B$.

7. $(A+B)+(C+D)=[(A+B)+C]+D$

(由结合律)

$$
\begin{aligned}
&=[A+(B+C)]+D\\
&=[A+(C+B)]+D\\
&=[(A+C)+B]+D\\
&=(A+C)+(B+D).
\end{aligned}
$$

8.
$$
\begin{aligned}
(A+B)'&=[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]'\\
&=[(A'\cup B)\cap(A\cup B')]\\
&=[(A'\cup B)\cap A]\cup[(A'\cup B)\cap B']\\
&=(A\cap B)\cup(A'\cap B')\\
&=A'+B=A+B'.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(A-K)\cup(B-K)&=(A\cap K')\cup(B\cap K')\\
&=(A\cup B)\cap K'\\
&=(A\cup B)-K.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[(A+K)\cup(B+K)]'\\
&\quad=(A+K')\cap(B+K')\\
&\quad=(A\cap B)+K'\cap(A+B)+K'\cap 1\\
&\quad=(A\cap B)+K'\cap(A+B)',
\end{aligned}
$$

(因 $A+B+1=(A+B)'$)

取补:

$$(A+K)\cup(B+K)=(A\cap B)+K\cup(A+B).$$

9. $A+(A\cup B)=(A\cap A'\cap B')$
$\cup(A'\cap(A\cup B))=A'\cap B.$

$B+(A\cap B)=(B\cap(A'\cup B'))$
$\cup(B'\cap A\cap B)=B\cap A'.$

$$B-(A\cap B)=B\cap(A'\cup B')=B\cap A'.$$

由 $A+(A\cup B)=B+(A\cap B)$ 有

$$A+B+(A\cap B)=A+A+(A\cup B)=A\cup B.$$

10. 由 9 可以得到

11. $(A+B)\times C=(A+B)+C'=(A+C')+B$

$$=(A\times C)+B$$

$$=(B+C')+A=(B\times C)+A.$$

$$(A\times C)+(B\times C)=(A+C')+(B+C')$$

$$=A+B.$$

12. (1) 由 9, $B+(A\cup B)=B'\cap A=A-B$, 因此 $(A-B)+B=B+B+(A\cup B)=A\cup B$.

(2) $(A-B)\cap B=A\cap B'\cap B=0$.

(3) $A\cap(A-B)=A\cap A\cap B'=A\cap B'=A-B$.

(4) $A-B=A\cap B'\subset A$.

(5) $A-A=A\cap A'=0$.

(6) $A-(B-C)=A\cap(B\cap C')'=A\cap(B'\cup C)$

$$=(A\cap B')\cup(A\cap C).$$

(7) $A-(A-B)=A\cap(A\cap B')'$

$$=A\cap(A'\cup B)=A\cap B.$$

(8) $(A-B)-C=A\cap B'\cap C'$,

$$(A-C)-(B-C)=(A\cap C')\cap(B\cap C')'$$

$$=(A\cap C')\cap(B'\cup C)$$

$$=A\cap B'\cap C'.$$

(9) $A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)'=A\cap(B'\cup C')$

$$=(A\cap B')\cup(A\cap C').$$

(10) $A-(B\cup C)=A\cap B'\cap C'$

$$(A-B)\cap(A-C)=A\cap B'\cap A\cap C'$$

$$=A\cap B'\cap C'.$$

(11) $(A \cup B) - B = (A \cup B) \cap B' = A \cap B'$.

$$A - (A \cap B) = A \cap (A' \cup B') = A \cap B'.$$

(12) $(A \cup B) \cup (B - A) = A \cup B \cup (B \cap A')$

$$= (A \cup B) \cap 1 = A \cup B.$$

13. (1) 若 $A = 0$ 及 $B = 0$, $A \cup B = 0 \cup 0 = 0$; 又若 $A \cup B = 0$, 则 $A \subset A \cup B = 0$, 但因 $0 \subset A$, 故有 $A = 0$.同理 $B = 0$.

(2) 若 $A \cap B' = A$, 则 $A' \cup (A \cap B') = A' \cup A = 1$, 故 $A' \cup B' = 1$, 因而 $B = B \cap (A' \cup B') = B - A$.

(3) 若 $A \cup B = A \cap B'$, 则

$$B = (A \cup B) \cap B = A \cap B' \cap B = 0.$$

(4) 若 $A \cap B = A \cap B'$, 则

$$\begin{aligned} A = A \cap 1 &= A \cap (B + B') \\ &= (A \cap B) + (A \cap B') \\ &= (A \cap B) + (A \cap B) = 0. \end{aligned}$$

(5) $A \subset A \cup B$, 因此若有 $A \cup B \subset C$, 则 $A \subset C$. 若 $A \subset C$ 及 $B \subset C$, 则

$$(A \cup B) \cap C' = (A \cap C') \cup (B \cap C') = 0.$$

(6) 由于 $A \cap B \subset A$, 因此 $C \subset A \cap B$ 蕴涵 $C \subset A$; 若 $C \subset A$ 及 $C \subset B$, 则

$$C \cap (A \cap B)' = (C \cap A') \cup (C \cap B') = 0.$$

(7) $A \subset B \cup C$ 等价于 $A \cap (B \cup C)' = 0$, 而后者是等价于 $A \cap B' \cap C' = 0$ 的.

(8) 若 $A - B = B - A$, 则

$$A = A \cup (A \cap B') = A \cup (B \cap A') = A \cup B;$$

而

$$B = B \cup (B \cap A') = B \cup (A \cap B') = B \cup A.$$

(9) 若 $A \cup B = A \cap B$,

$$A = A \cup (A \cap B) = A \cup (A \cup B) = A \cup B,$$

而

$$B = B \cup (A \cap B) = B \cup (A \cup B) = A \cup B.$$

(10) 若 $A \subset B \subset C$, 则 $A \cup B = B$, $B \cap C = B$; 若 $A \cup B = B \cap C$, 则

$$B = B \cap (A \cup B) = B \cap B \cap C = B \cap C,$$

所以 $B \subset C$, 而且 $A \cup B = B$, 所以 $A \subset B$.

(11) 若 $A \cap B' = 0$ 及 $C \cap D' = 0$, 则

$$(A \cap B') \cup (C \cap D') = 0;$$

若 $(A \cap B') \cup (C \cap D') = 0$, 则 $A \cap B' = 0$, $C \cap D' = 0$.

(12) 若 $A + B = 0$, 则

$$A = A + 0 = A + A + B = B.$$

若 $A = B$ 及 $C = D$, 则 $A + B = 0$, $C + D = 0$, 所以 $(A + B) \cup (C + D) = 0$; 反之, 若 $(A + B) \cup (C + D) = 0$, 则 $A + B = 0$, $C + D = 0$, 所以 $A = B$, $C = D$.

(13) 若 $A \cap X' = B \cap X'$, 则

$$\begin{aligned}(A + B) \cap X' &= (A \cap X') + (B \cap X') \\ &= (A \cap X') + (A \cap X') = 0;\end{aligned}$$

若 $(A + B) \cap X' = 0$, 则 $(A \cap X') + (B \cap X') = 0$, 所以 $A \cap X' = B \cap X'$.

14. (1) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$

$$\begin{aligned}&= [B \cup (A \cap C)] \cap (C \cup A) \\ &= [B \cap (C \cup A)] \cup [(A \cap C) \cap (A \cup C)] \\ &= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).\end{aligned}$$

(2) 由 (1),

$$\begin{aligned}&(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D) \\ &\quad \cup (B \cap C) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D) \\ &= [(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)]\end{aligned}$$

$$\cup [(A \cup B \cup C) \cap D]$$

$$= (A \cup B \cup C) \cap \{[(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)] \cup D\}$$

$$= (A \cup B \cup C) \cap (B \cup C \cup D) \cap (C \cup D \cup A) \cap (D \cup A \cup B).$$

(3) $A-(B \cup C)=A \cap B' \cap C'=(A-B)-C.$

(4) $(A-B) \cap C=A \cap B' \cap C=(A \cap C)-B.$

(5) $(A \cup B)-C=(A \cup B) \cap C'$
$=(A-C) \cup (B-C).$

(6) $A-(B-A)=A \cap (B \cap A')'$
$=A \cap (A \cup B')=A.$

(7) $(A-C) \cap (B-C)=(A \cap C') \cap (B \cap C')$
$=A \cap B \cap C'.$

(8) $(A-B) \cap (C-D)=A \cap B' \cap C \cap D'$
$=(A \cap C) \cap (B \cup D)'.$

(9) $A-[B-(C-D)]=A \cap [B \cap (C' \cup D)]'$
$=A \cap [B' \cup (C \cap D')]$
$=(A-B) \cup [A \cap C \cap D'].$

(10) $(A \cap B') \cup (B \cap C') \cup (C \cap A') \cup (A \cap B \cap C)$

$$= [(A \cap B') \cup (A \cap B \cap C)] \cup (B \cap C') \cup (C \cap A')$$

$$= [A \cap (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B' \cup C)] \cup (B \cap C') \cup (C \cap A')$$

$$= [A \cap (B \cap C')'] \cup (B \cap C') \cup (C \cap A')$$

$$= A \cup (B \cap C') \cup (C \cap A')$$

$$= (A \cup C) \cup (B \cap C') = A \cup B \cup C.$$

15. 该集合包含集合0, A, B, $A \cap B$, $A-B$, $B-A$.

16. $A \cup C \subset (A \cup C) \cup B=(A \cup B) \cup (B \cup C).$

$$
\begin{aligned}
&[(A \cap B') \cup (B \cap C')] \cap (A \cap C') \\
&\qquad = [(A \cap B') \cup (A \cap B \cap C')] \cap C' \\
&\qquad = (A \cap B' \cap C') \cup (A \cap B \cap C') \\
&\qquad = (A \cap C') \cap (B \cup B') = A \cap C'.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
A - C \subset (A - B) \cup (B - C) \\
C - A \subset (B - A) \cup (C - B)
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
A + C = (A - C) \cup (C - A) &\subset (A - B) \\
&\cup (B - A) \cup (B - C) \cup (C - B) \\
&= (A + B) \cup (B + C).
\end{aligned}
$$

17\. 由16，$A - C \subset (A - B) \cup (B - C)$，

$$
A - D \subset (A - C) \cup (C - D)
$$

因此

$$
(A - C) \cup (C - D) \subset (A - B) \cup (B - C) \cup (C - D),
$$

所以

$$
A - D \subset (A - B) \cup (B - C) \cup (C - D).
$$

习　题　II

1\. (1) 由分配律可证.

(2) 重复应用分配律.

(3) 由 (2) 取补.

(4) $[(A \cup B) \cap (A' \cup C)] \cup [(A \cup D) \cap (A' \cup E)]$

$$
\begin{aligned}
&= (A \cup B \cup A \cup D) \cap (A \cup B \cup A' \cup E) \\
&\quad \cap (A' \cup C \cup A \cup D) \cap (A' \cup C \cup A' \cup E) \\
&= (A \cup B \cup D) \cap (A' \cup C \cup E).
\end{aligned}
$$

(5) $(A \cap B') + (A' \cap B) = [A \cap B' \cap (A \cup B')]$

$\cup [(A' \cup B) \cap (A' \cap B)]$

$= (A \cap B') \cup (A' \cap B) = A + B.$

(6) $(A + B) \cup (B + C)$ 的补是

$(A' + B) \cap (B' + C) = A' \cap B' + (A' + B) \cap C$

而 $(A + C) \cup (B + C)$ 的补是

$(A' + C) \cap (B' + C) = A' \cap B' + C \cap (A' + B' + 1)$

$= A' \cap B' + C \cap (A' + B),$

(因为 $A' + B' + 1 = (A' + B')' = A' + B$)

(7) 在(6)中取 $C = 0.$

(8) $A + (A \cup B) = [A' \cap (A \cup B)] \cup [A \cap (A' \cap B')]$

$= B \cap A' = B - A.$

(9) 我们有 $B - A = B \cap A' = B \cap (A' \cup B')$

$= B - (A \cap B),$

所以

$$A + [B - (A \cap B)] = A + (B - A)$$

$$= A + A + (A \cup B) \quad (\text{由}(8))$$

$$= A \cup B.$$

(10) 由(6).

(11) $(A \cup B) \cap (A' \cup C)$

$= (A \cap A') \cup (A' \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$= [(B \cap C) \cap (A \cup A')] \cup (A' \cup B) \cup (A \cap C)$

$= \{(A \cap C) \cup [(A \cap C) \cap B]\}$

$\cup \{(A' \cap B) \cup [(A' \cap B) \cap C]\}$

$= (A \cap C) \cup (A' \cap B).$

2.

A	B	B'	$A\cap B'$	$(A\cap B')\cap B'$	$(A\cap B')'\cap B$	$(A-B)+B$	$A\cup B$
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1

末两列的一致证明了 $(A-B)+B=A\cup B$.

3. $(A\cup B)'\cap A\cap B=A'\cap B'\cap A\cap B$.

$$
\begin{aligned}
&(A\cup B\cup C)'\cap(A\cup B)\\
&\quad=A'\cap B'\cap C'\cap(A\cup B)\\
&\quad=(A'\cap B'\cap C'\cap A)\cup(A'\cap B'\cap C'\cap B),
\end{aligned}
$$

这就是两个标准形式.

$$
\begin{aligned}
&(A'\cap B)'\cap(C\cup B')'\cap(C\cup A')\\
&\quad=(A\cup B')\cap B\cap C'\cap(A'\cup C)\\
&\quad=(A\cap A'\cap B\cap C')\cup(A\cap B\cap C\cap C')\\
&\qquad\cup(A'\cap B\cap B'\cap C')\cup(B\cap B'\cap C\cap C').
\end{aligned}
$$

4. 使 A 对应 $A+K$, 且若 $A+K=B+K$, 则 $A=B$, 这就使对应是 1-1 的. 我们还有 $(A+K)'=A'+K$, 因此补亦能被保持.

5. $(A, B)'=(A', B')\to(B')'$,

$$
\begin{aligned}
&(A, B)\cap(C, D)=(A\cap C, B\cup D)\\
&\qquad\to(B\cup D)'=B'\cap D',\\
&(A, B)\cup(C, D)=(A\cup C, B\cap D)\\
&\qquad\to(B\cap D)'=B'\cup D'.
\end{aligned}
$$

6. 见 2.96 节.

7. 见 2.96 节.

8. 若 A 及 B 映射到同一元素上去, 则 $A\cup B$, $A\cap B$ 也

映射到这个元素上去.

9. 我们有 $A \subset B$ 当且仅当 $B = A \cup B$;
在映射 $A \to A^* \cup \bar{A}$ 下,我们有

$$B \to B^* \cup \bar{B},\ A \cup B \to (A \cup B)^* \cup \overline{(A \cup B)}$$
$$= A^* \cup B^* \cup \bar{A} \cup \bar{B}$$
$$= A^* \cup \bar{A} \cup B^* \cup \bar{B}$$

因此,若 $A \subset B$, 又若 $M(A)$, $M(B)$ 是映象 $A^* \cup \bar{A}$, $B^* \cup \bar{B}$, 则 $M(A) \subset M(B)$. 由于映象 $A \to A^* \cap \bar{A}$, 我们把 $A \subset B$ 写成 $A = A \cap B$ 的形式.

10. 令 $K(a)$ 是数 a 的质因子集合, $K'(a)$ 是N的质因子所组成的集合, 这些因子不是 a 的因子. 则当且只当 $a = b$ 时 $K(a) = K(b)$; $K(N)$ 起了全集合的作用,而 $K(1)$ 则是空集. 由于 $a \cup b$ 是 a 及 b 的质因子的乘积(每个因子只能计一次),而 $a \cap b$ 是 a 和 b 的公共质因数的乘积,所以

$$K(a \cup b) = K(a) \cup K(b),\ K(a \cap b) = K(a) \cap K(b);$$

由于 $a' = N/a$, 所以 $K(a') = K'(a)$.
由 $K(a \cup b) = K(a) \cup K(b) = K(b) \cup K(a) = K(b \cup a)$ 有 $a \cup b = b \cup a$, 同理可证 $a \cap b = b \cap a$.
由

$$K(a \cup (b \cap c)) = K(a) \cup K(b \cap c)$$
$$= K(a) \cup [K(b) \cap K(c)]$$
$$= [K(a) \cup K(b)] \cap [K(a) \cup K(c)]$$

(根据集合的分配律)

$$= K(a \cup b) \cap K(a \cup c)$$
$$= K[(a \cup b) \cap (a \cup c)],$$

因为

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cap c),$$

同理

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c).$$

其次我们注意

$$K(a\cup 1)=K(a)\cup K(1)=K(a)\cup 0=K(a),$$

所以

$$a\cup 1=a,$$

又

$$K(a\cap N)=K(a)\cap K(N)=K(a)\cap 1=K(a),$$

所以

$$a\cap N=a.$$

最后还要注意

$$K(a\cup a')=K(a)\cup K(a')=K(a)\cup K'(a)=K(N),$$

$$K(a\cap a')=K(a)\cap K(a')=K(a)\cap K'(a)=K(1),$$

所以 $a\cup a'=N$, $a\cap a'=1$, 证毕.

11. $B\cap A=(C\cup A)\cap A=(C\cap A)\cup A=0\cup A=A$,

又

$$B\cap A=(C\cup A)\cap C=C\cup(A\cap C)=C\cup 0=C;$$

因为

$$C\cap(C\cup A)=C\cup(C\cap A)=C$$

及

$$D\cap(D\cup A)=D,$$

因此由 $C\cup A=D\cup A$ 有

$$C=C\cap(C\cup A)=C\cap(D\cup A)=C\cap D,$$

$$D=D\cap(D\cup A)=D\cap(C\cup A)=D\cap C,$$

所以 $C=D$.

12. 我们有

$$X\cup A=(A'\cap B)\cup A=(A'\cap B)\cup(A\cap B)$$

$$=(A'\cup A)\cap B=B$$

及 $X\cap A=B\cap A'\cap A=0$. 由前个习题可知解是唯一的.

13. 我们有

$$\begin{aligned}X \cup (A \cap B) &= [X \cap (A \cup B)] \cup (A \cap B) \\ &= (X \cap A) \cup (X \cap B) \cup (A \cap B) \\ &= [(X \cap A) \cup (B \cap A)] \\ &\quad \cup [(X \cap B) \cup (A \cap B)] \\ &= [(X \cup B) \cap A] \cup [(X \cup A) \cap B] \\ &= A \cup B\end{aligned}$$

且

$$X \cap (A \cap B) = 0, \quad (A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B,$$

因此由前面习题

$$X = (A \cup B) \cap (A \cap B)' = A + B.$$

反之,若 $X = A + B$, 则

$$\begin{aligned}X \cap (A \cup B) &= (A + B) \cap [(A + B) + A \cap B] \\ &= A + B + (A + B) \cap (A \cap B) \\ &= A + B = X.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A \cap (B \cup X) &= A \cap [B \cup (A + B)] \\ &= A \cap (B \cup A) = A,\end{aligned}$$

由题 1. (7),

$$\begin{aligned}B \cap (A \cup X) &= B \cap [A \cup (A + B)] \\ &= B \cap (A \cup B) = B,\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}X \cap A \cap B &= (A + B) \cap A \cap B \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)' \cap (A \cap B) = 0.\end{aligned}$$

习　题　III

1. 由 A6, A3 $(A' \cup B)' \cup (A' \cup B')' = A$,

而由 A2, 用 B' 代 B 就有

$$(A' \cup B')' \cup (A' \cup B'')' = A,$$

因此 1. 就可由 A7 得到.

2. $A \cup A' = [(A' \cup A''')' \cup (A' \cup A'')']$
$\cup [(A'' \cup A''')' \cup (A'' \cup A'')'],$

由 A6 及

$$A' \cup A'' = [(A'' \cup A'')' \cup (A'' \cup A')']$$
$$\cup [(A''' \cup A'')' \cup (A''' \cup A')']$$

则 2 可以利用 A3 和 A4 得到.

3. $A = (A' \cup A''')' \cup (A' \cup A'')',$

$A'' = (A''' \cup A'')' \cup (A''' \cup A')',$

则用 A3, 2 可得结果.

4. 令 $A \cup A' = X$, $B \cup B' = Y$, 则利用 A3, A6, A5, A4 和 2,

$$\begin{aligned} Y = B' \cup B &= B' \cup [(B' \cup B')' \cup (B' \cup B)'] \\ &= B' \cup (B'' \cup Y') \\ &= (B' \cup B'') \cup Y' \\ &= (B \cup B') \cup Y' = Y \cup Y', \end{aligned}$$

同理

$$X = X' \cup X.$$

但因 A6, A3, A4

$$\begin{aligned} Y \cup Y' &= [(Y' \cup X'')' \cup (Y' \cup X')'] \\ &\quad \cup [(Y'' \cup X'')' \cup (Y'' \cup X')'] \\ &= [(X'' \cup Y'')' \cup (X'' \cup Y')'] \\ &\quad \cup [(X' \cup Y'')' \cup (X' \cup Y')'] \end{aligned}$$

所以用 A6

$$Y = X' \cup X = X \cup X' = X.$$

5. 由 4 知 1 是唯一的,而由 A3 知 $1 = A' \cup A$.

6. 由 4 知 0 是唯一的.

7. 由 $A' = B'$ 用 A2 有 $A'' = B''$，因而由 3 得 $A = B$.

8. 由 A6, $(A' \cup A')' \cup (A' \cup A)' = A$, 因此

$$A'' \cup (A \cup A')' = A,$$

因为 $0 = 1' = (A \cup A')'$, 所以我们有 $A'' \cup 0 = A$, 因此 $0 \cup A = A$ 及 $A \cup 0 = A$.

9. $A \cap 1 = (A' \cup 1')' = (A' \cup 0)' = A'' = A$.

10. $A \cap A' = (A' \cup A'')' = (A \cup A')' = 1' = 0$.

11. $A \cap B = (A' \cup B')' = (B' \cup A')' = B \cap A$.

12. $$\begin{aligned}(A \cap B) \cap C &= (A' \cup B')' \cap C \\ &= [(A' \cup B')'' \cup C']' \\ &= [(A' \cup B') \cup C']' \\ &= [A' \cup (B' \cup C')]' \\ &= A \cap (B' \cup C')' \\ &= A \cap (B \cap C).\end{aligned}$$

13. $(A' \cap B')' = (A'' \cup B'')'' = A \cup B$.

14. $A \cap A = (A' \cup A')' = A'' = A$.

15. $$\begin{aligned}A \cup 1 &= A \cup (A \cup A') = (A \cup A) \cup A' \\ &= A \cup A' = 1.\end{aligned}$$

16. $A \cap 0 = (A' \cup 1)' = 1' = 0$.

17. $$\begin{aligned}A \cup (A \cap B) &= (A \cap B) \cup [(A \cap B) \cup (A \cap B')] \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap B') = A.\end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned}A \cap (A \cup B) &= [A' \cup (A \cup B)']' \\ &= [A' \cup (A' \cap B')]' = A'' = A.\end{aligned}$$

19. 因为 $(A' \cup B')' \cup (A' \cup B)' = A$, 若 $A' \cup B = 1$, 则 $(A' \cup B')' = A$; 再用 A 6, $(B' \cup A')' \cup (B' \cup A) = B$, 因此如果 $B' \cup A = 1$, $(B' \cup A')' = B$, 所以 $A = B$.

20. 从 $A \cap B = 0$ 及 $A \cup B = 1$ 有 $B' \cup A' = 1$, $(A')' \cup B = 1$, 所以由 19, $A' = B$.

21. 由 1 可知问题中的并等于

$$(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A' \cap B')$$
$$= A \cup A' = 1.$$

22. 考虑并中任意两项，例如 $A \cap B' \cap C$，$A' \cap B \cap C$；它们的交是

$$(A \cap A') \cap (B' \cap C \cap B \cap C)$$
$$= 0 \cap (B' \cap C \cap B \cap C) = 0.$$

23. 利用 1，$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$= [(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C')]$$
$$\cup [(A \cap B' \cap C) \cup (A \cap B \cap C)],$$

利用 A 5，

$$= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C)$$
$$\cup (A \cap B \cap C').$$

24. $[A \cap (B \cup C)]' = A' \cup (B \cup C)' = A' \cup (B' \cap C')$；但由 1，

$$A' = (A' \cap B) \cup (A' \cap B')$$
$$= (A' \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C')$$
$$\cup (A' \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B' \cap C'),$$

而且 $B' \cap C' = (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C')$，从而得到结果.

25. 利用 23，24 及 21.

26. 把方程 23 右边三项写为 P，Q，R，方程 24 右边各项写成 S，T，U，V，W，则有

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = P \cup Q \cup R,$$
$$[A \cap (B \cup C)]' = S \cup T \cup U \cup V \cup W;$$

由 22 $(P \cap S) \cup (P \cap T) = 0 \cup 0$，

因此由 25，8

$$[P \cap (S \cup T)]' = 1,$$

这就证明了

$$P \cap (S \cup T) = 0.$$

同理 $P \cap (S \cup T) \cup (P \cap U) = 0 \cup 0 = 0$, 因此有

$$P \cap (S \cup T \cup U) = 0$$

这样一直到

$$P \cap (S \cup T \cup U \cup V \cup W) = 0.$$

用 X 代替 $S \cup T \cup U \cup V \cup W$, 我们有 $X \cap P = 0$, 同样地 $X \cap Q = 0$, $X \cap R = 0$, 故同前面一样有

$$X \cap (P \cup Q \cup R) = 0,$$

这就是说, $(P \cup Q \cup R) \cap (S \cup T \cup U \cup V \cup W) = 0$, 而这就是所需要的.

27. 由 25, 26, 20

$$[(A \cap B) \cup (A \cap C)]' = [A \cap (B \cup C)]'.$$

28. 由 3, A7

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= A'' \cup (B' \cup C')' \\ &= [A' \cap (B' \cup C')]' \\ &= [(A' \cap B') \cup (A' \cap C')]' \\ &= (A' \cap B')' \cap (A' \cap C')' \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

这就完成了建基于公理 A1—7 的系对于公理 2.01—2.04 的证明; 因为在公理系 2.01—2.04 中已经证明了公理 A1—7 的成立, 所以这些公理系是完全等价的.

29. 若 $A \cup B = B$, 则

$$\begin{aligned} A \cap B &= (A' \cup B')' = [A' \cup (A \cup B)']' \\ &= [A' \cup (A' \cap B')]' = A'' = A; \end{aligned}$$

又若 $A \cap B = A$,

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A' \cap B')' = [(A \cap B)' \cap B']' \\ &= (A \cap B)'' \cup B'' = (A \cap B) \cup B = B. \end{aligned}$$

30. 若 $A\cup B=B$, 则

$$A'\cup B=A'\cup(A\cup B)=(A\cup A')\cup B=1\cup B=1.$$

若 $A'\cup B=1$,

$$\begin{aligned}A\cup B&=[A'\cap B']'=[(A'\cap B')\cup 0]'\\&=[(A'\cap B')\cup(B\cap B')]'\\&=[(A'\cup B)\cap B']'=(A'\cup B)'\cup B\\&=1'\cup B=0\cup B=B.\end{aligned}$$

31. 若 $A\cup B=B$, 则

$$\begin{aligned}A\cap B'&=(A'\cup B)'=[A'\cup(A\cup B)]'\\&=[(A'\cup A)\cup B]'=(1\cup B)'=0;\end{aligned}$$

若 $A\cap B'=0$, 则

$$A'\cup B=(A\cap B')'=1,$$

因此由 30, $A\cup B=B$.

32. $A\cap B'=0$ 等价于 $A\cup B=B$, $A\cap B=A$, $A'\cup B=1$ (由 29, 30, 31).

33. 若并及补适合下表:

$\cup$	0	1	2	3	4	5	′
0	0	1	2	3	4	5	1
1	1	1	1	1	1	1	0
2	2	1	2	1	1	2	3
3	3	1	1	3	3	1	2
4	4	1	1	4	4	1	5
5	5	1	5	1	1	5	4

除了A 3外,所有公理都能被满足,因为 $5\cup 2=5$, 但 $2\cup 5=2$.

34. 公理 A 4 不能被满足,因为

$$(2\cup 1)\cup 3=2\cup 3=1,\quad 2\cup(1\cup 3)=2\cup 0=2,$$

但其余的却都能被满足.

35. 公理 A 5 不能满足，因为 $2 \cup 2 = 1$.

36. 公理 A 6 不能满足，因为

$$(3' \cup 5')' \cup (3' \cup 5)' = (2 \cup 4)' \cup (2 \cup 5)'$$
$$= 1' \cup 1' = 0 \neq 3.$$

37. 若 $X = A + U$, $Y = B + U$, 则 $X + Y = A + B$. 反之，若 $X + Y = A + B$, 则 $Y + B = X + A$, 所以 $X = A + (B + Y)$, $Y = B + (B + Y)$ 表示

$$X = A + U, \quad Y = B + U,$$

其中 U 的值为 $B + Y$.

38. (1) 这个方程的补也就是习题 37 中的那一个.

(2) 一般解是

(2′) $X = (C \cup L) \cap N$, $Y = (C \cup M) \cap N$,

此处 L, M, N 是任意的；因为如果 $C \cap X = C \cap Y$, 则

$$X = X \cup (C \cap X) = X \cup (C \cap Y) = (X \cup C) \cap (X \cup Y)$$
$$Y \qquad\qquad = (Y \cup C) \cap (X \cup Y)$$

这表示对于 L, M, N 有值 X, Y, $X \cup Y$ 时. X, Y 满足(2′) 此外，若 X, Y 由(2′)给定，则

$$C \cap X = \{C \cap (C \cup L)\} \cap N = C \cap N$$
$$= \{C \cap (C \cup M)\} \cap N = C \cap Y.$$

(3) 一般解是 $X = A' \cap U$, 因为 $A' \cap U \cap A = 0$, 且若 $A \cap X = 0$ 则 $A' \cup (A \cap X) = A' \cup 0 = A'$；由此 $A' \cup X = A'$ 从而 $X = X \cap (A' \cup X) = A' \cap X$, 这就说明了对于 U 的值 X 来说，$X = A' \cap U$.

39. 若 $X = (U \cup A') \cap B$ 及 $A \subset B$, 则

$$A \cup X = A \cup B = B.$$

倒过来看，若 X 是 $A \cup X = B$ 的一个解，则 $A \subset A \cup X = B$, 且 $A' \cap X' = B'$, 因此 $A \cup X' = A \cup (A' \cap X') = A \cup B'$. 从而 $A' \cap X = A' \cap B$, 所以

$$X = X\cup(X\cap A') = X\cup(A'\cap B)$$
$$= (X\cup A')\cap(X\cup B)$$
$$= (X\cup A')\cap B,\quad (因\ X\subset B),$$
这就说明了对于U的值X来说，$X = (U\cup A')\cap B$.

40. 若 $A\cap X = B$, $A'\cup X' = B'$, 则其一般解是
$$X' = (U'\cup A)\cap B',$$
即
$$X = (U\cap A')\cup B,$$
所限制的条件是$A'\subset B'$，即 $B\subset A$。

习　　题　　IV

1. (1)*

p	q	r	$p\to(q\&r)$	$(p\to q)\&(p\to r)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

习题 1 的其余部分可同样解答.

2. (4)

p	q	$p\to q$	$p\to\neg q$	$(p\to q)\to\{(p\to\neg q)\to\neg p\}$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

* 原书表中第 4、5 两列中的数字误为 10001111. ——译者注

3. 由假设 $p\to r$, $q\to r$, 我们可由置换得

$\neg p \vee r$, $\neg q \vee r$, $(\neg p \,\&\, \neg q) \vee r$, $(p \vee q) \to r$

因此,由演绎定理

$$(p\to r)\to\{(q\to r)\to[(p\vee q)\to r]\}.$$

对于 2.(2) 我们注意到

$$(p\to\neg p)\to\neg p \longleftrightarrow p\to\neg(p\to\neg p)$$
$$\longleftrightarrow \neg p\vee(p\,\&\,p)\longleftrightarrow\neg p\vee p.$$

因而 $p\vee\neg p$ 是可证的.

用 $\neg p$ 代 p 由 2.2 得出 2.3

$$(p\to q)\to[(p\to\neg q)\to\neg p]$$
$$\longleftrightarrow[(p\to q)\,\&\,p]\to\neg(p\to\neg q)$$
$$\longleftrightarrow\neg p\vee(p\,\&\,\neg q)\vee(p\,\&\,q)$$
$$\longleftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\vee(p\,\&\,q)$$
$$\longleftrightarrow\neg(p\,\&\,q)\vee(p\,\&\,q).$$

而这是可证的.

4.(1) 等价于

$$(p\,\&\,\neg q)\vee(q\,\&\,\neg p)$$
$$\longleftrightarrow(p\vee q)\,\&\,(p\vee\neg p)\,\&\,(\neg q\vee q)\,\&\,(\neg p\vee\neg q).$$

(2) 等价于

$$(p\vee\neg q\vee\neg r)\,\&\,(p\vee r\vee\neg r)\,\&\,(\neg q\vee\neg r\vee r)$$
$$\&\,(p\vee\neg q\vee r)\,\&\,(p\vee r)$$
$$\&\,(\neg q\vee r)\,\&\,(\neg r\vee r).$$

(3) 等价于 $p\vee q\vee\neg r\vee q$, 而这既是析取又是合取(一项)范式.

5. 这 15 个语句构成语句逻辑的另一公理系统, 在其中 $\&$, $\vee$, $\neg$, $\to$ 及 $\longleftrightarrow$ 是系统的所有符号(而非由定义引入者).

6.(1) 由真语句 $p\to(q\to(p\,\&\,q))$ 得到.

(2) 由公理 $p \to (p \vee q)$ 得到.

(3) 应用习题 2.(4) 及 6.(2) 由 $\neg Q$ 推导 $P \to \neg Q$.

(4) 应用等价关系 $(p \& q) \to r \longleftrightarrow p \to (q \to r)$.

7. 每个语句由变元借助于二元运算 $p \vee q$ 及否定 $\neg p$ 构成.

今 $p|p$ 有和 $\neg p$ 相同的真值表,而 $(p|p)|(q|q)$ 有和 $p \vee q$ 相同的真值表, 所以每个语句有一个由函数 $p|q$ 单独表出的等价真值表. 语句逻辑当然也能作为一个奠基于这个单独运算的单独公理系统.

8. 用等式代替真值表等价关系,我们有

$$\neg p = (p, p, p)$$

$$0 = (p, \neg p, r) = (p, (p, p, p), r)$$

$$1 = \neg 0$$

$$p \vee q = \neg(p, q, 1).$$

习 题 V

1. (1) 由吸收律

$$a \cap a = a \cap (a \cup (a \cup b)) = a$$

$$a \cup a = a \cup (a \cap (a \cup b)) = a.$$

(2) 若 $a = a \cap b$, 则 $b = b \cup (a \cap b) = b \cup a$, 并且倒过来也成立.

(3) $a = a \cup (a \cap b) = a \cup (a \cup b) = (a \cup a) \cup b = a \cup b$

及

$$b = b \cup (a \cap b) = b \cup (a \cup b) = (b \cup b) \cup a = a \cup b.$$

(4) $a \subset a \cup b \cup c = a \cap b \cap c \subset b$, 因此 $a \subset b$, 同理 $b \subset a$, 所以 $a = b$, 等等.

(5) 若 $c = c \cap a$ 及 $c = c \cap b$, 则

$$c \cap (a \cap b) = (c \cap a) \cap (a \cap b) = c \cap a \cap b$$
$$= (c \cap b) \cap a = c \cap a = c$$

所以 $c \subset a \cap b$.

(6) 1.(5) 的对偶.

(7) $a \subset b \to a = a \cap b \to a \cap c$
$$= a \cap b \cap c = (a \cap c) \cap (b \cap c)$$
$$\to a \cap c \subset b \subset c.$$

(8) 1(7) 的对偶.

(9) $a \subset b \,\&\, c \subset d \to a = a \cap b \,\&\, c = c \cap d$
$$\to a \cap c = (a \cap b) \cap (c \cap d)$$
$$= (a \cap c) \cap (b \cap d)$$
$$\to a \cap c \subset b \cap d.$$

(10) 1.(9) 的对偶.

(11) 因为 $a \cap b \subset a$ 及 $a \cap c \subset a$, 所以由 1.(6),
$$(a \cap b) \cup (a \cap c) \subset a;$$
但 $a \cap b \subset b \cup c$ 且 $a \cap c \subset b \cup c$, 所以
$$(a \cap b) \cup (a \cap c) \subset b \cup c.$$
从而 1.(11) 可由 1.(5) 得到.

(12) $a \subset a \cup b$, $a \subset a \cup c$, 因此
$$a \subset [(a \cup b) \cap (a \cup c)],$$
这就可得到结果.

2. 设 $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$, 则
$$(a \cup b) \cap (a \cup c) = [(a \cup b) \cap a] \cup [(a \cup b) \cap c]$$
$$= a \cup [c \cap (a \cup b)]$$
$$= a \cup [(a \cap c) \cup (b \cap c)]$$
$$= [a \cup (a \cap c)] \cup (b \cap c)$$
$$= a \cup (b \cap c)$$

而这是另一分配律.

3. 若 $a=a\cup b$, 则 $\bar{a}=\overline{a\cup b}=\bar{a}\cup\bar{b}$, 因此如果 $b\subset a$, 则 $\bar{b}\subset\bar{a}$, 这就证明了一个并同态也是一个格同态.

4. $a\cap b\to(a\cap K)\cap(b\cap K)=(a\cap b)\cap k$

因此这个映射是一个交（因而是一个格）同态. 同样地，在 $a\to a\cup K$ 之下，

$$a\cup b\to(a\cup K)\cup(b\cup K)=(a\cup b)\cup K.$$

5. 令 $\bar{a}$ 是 a 的映象. 考察格中满足 $a\subset\bar{a}$ 的元素的集合 A; 由于格是完备的，这个集有最小上界，设为 u. 我们来证 u 在映射下是不动的,即 $u=\bar{u}$.

由于对于 $a\in A$ $a\subset u$, 又因为一个同态是保持包含关系的,我们有 $\bar{a}\subset\bar{u}$; 但是 $a\subset\bar{a}$, 所以 $a\subset\bar{u}$, 这就证明了 $\bar{u}$ 是集合 A 的一个上界. 因为 $u\subset\bar{u}$, 所以 $\bar{u}\subset\bar{\bar{u}}$, 所以由 A 的定义, $\bar{u}\in A$, 因此 $\bar{u}\subset u$; 但是 u 是 A 的最小上界, 而 $\bar{u}$ 是一个上界,故 $u\subset\bar{u}$, 这就证明了 $u=\bar{u}$.

6. $a\cap b\subset a\cup b$, $a\cap b\subset b\cup c$, $a\cap b\subset c\cup a$, 所以由 1.5,

$$a\cap b\subset(a\cup b)\cap(b\cup c)\cap(c\cup a)=D.$$

同理, $b\cap c$ 和 $c\cap a$ 均包含于 D, 而由 1.(6) 就可得到结果.

7. 若格是分配的

$$\begin{aligned}
&[(a\cup b)\cap(b\cup c)]\cap(c\cup a)\\
&\quad=[(a\cup b)\cap(b\cup c)\cap c]\cup[(a\cup b)\cap(b\cup c)\cap a]\\
&\quad=[(a\cup b)\cap c]\cup[a\cap(b\cup c)]\\
&\quad=[(a\cap c)\cup(b\cap c)]\cup[(a\cap b)\cup(a\cap c)]\\
&\quad=(a\cap c)\cup(b\cap c)\cup(a\cap b),
\end{aligned}$$

这就证明了 7. 倒过来看,若 7 成立,用 $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ 代 7 中的 a, $B\cup C$ 代 b 及 A 代 c, 7 的左边变成

$$[(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup C)]\cup[(B\cup C)\cap A]$$
$$\cup[A\cap(A\cup B)\cap(A\cup C)]$$
$$=[(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup C)]\cup A$$
（由吸收律）
$$=(A\cap C)\cup(B\cap C)\cup(A\cap B)\cup A\quad(由 7)$$
$$=A\cup(B\cap C),$$
而在这个置换下，7 的右边变成
$$\{[(A\cup B)\cap(A\cup C)]\cup(B\cup C)\}$$
$$\cap[(B\cup C)\cup A]\cap\{A\cup[(A\cup B)\cap(A\cup C)]\}$$
$$=\{[(A\cup B)\cap(A\cup C)]\cup(B\cup C)\}$$
$$\cap[A\cup B\cup C]\cap[(A\cup B)\cap(A\cup C)],$$
（由 1.(12)）
$$=\{[(A\cup B)\cap(A\cup C)]\cup(B\cup C)\}$$
$$\cap[(A\cup B)\cap(A\cup C)],$$
由于 $(A\cup B)\subset(A\cup B\cup C)$，由吸收律得
$$=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

8. $x=x\cup(x\cap a)=x\cup(a\cap y)=(x\cup a)\cap(x\cup y)$
$$=(a\cup y)\cap(x\cup y)=(a\cap x)\cup y$$
$$=(a\cap y)\cup y=y.$$

9. 若 $a\subset K$ 及 $b\subset K$，则 $a\cup b\subset K$（由 1.(6)），而若 $a\subset K$ 及 $b\subset a$ 则 $b\subset K$，所以包含于 K 的元素的集合形成一个理想. 设 L 是一个有限格，在其中 J 是一个理想. J 有有限多个元素，比如说 $a_1, a_2, \cdots, a_k$，且 $u=a_1\cup a_2\cup\cdots\cup a_k$ 属于 J. 因此 J 的每个元素被包含于元素 u 中；倒过来，L 的包含于 u 的每个元素属于 J，从而 J 与 (u) 重合.

10. 若用 $m\subset n$ 表示 $m=m\cap n$，则 $m\subset n$ 指的是 m 整除 n，所以 $n=m\cup n$. 对于这个包含关系，$m\cap n$ 是 m, n 的最大下界（因为 m 和 n 的任何因子是它们的最高公因子的

一个因子)，而 $m \cup n$ 是 m，n 的最小上界(因为任何N能被 m和 n 整除者也能被它们的最小公倍数整除)。

11. $x \in (a) \cap (b) \longleftrightarrow x \in (a) \,\&\, x \in (b)$

$$\longleftrightarrow x \subset a \,\&\, x \subset b \longleftrightarrow x \subset a \cap b$$

$$\longleftrightarrow x \in (a \cap b).$$

$x \in (a) \dot{\cup} (b) \longleftrightarrow$ 在 (a)，(b) 中有元素 a_1，b_1 使

$x \subset a_1 \dot{\cup} b_1 \longleftrightarrow$ 有元素 $a_1 \subset a$，$b_1 \subset b$ 使

$x \subset a_1 \dot{\cup} b_1 \longleftrightarrow x \subset a \dot{\cup} b$

$$\longleftrightarrow x \in (a \dot{\cup} b).$$

12. 若 $(a) = (b)$，则因 $a \subset a$，$a \in (a)$，$a \in (b)$，所以 $a \subset b$；同理 $b \subset a$；这就证明了 $a = b$。因此 a 到 (a) 上面的映射是一对一的。又由习题 11，它还保持格运算，所以是一个同构对应。

13. $(a + a) = (a + a)(a + a) = aa + aa + aa + aa$ (由分配律)

$$= (a + a) + (a + a)$$

因为

$$0 = (a+a) + (\overline{a+a}) = (a+a) + [(a+a) + (\overline{a+a})]$$
$$= (a + a) + 0 = a + a.$$

由此有

$$a = a + 0 = a + (a+\bar{a}) = (a+a) + \bar{a} = \bar{a} + o = \bar{a}.$$

设 a，b 是布尔环的任意两个元素，

$$a + b = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb$$
$$= a + ab + ba + b$$

从而 $0 = (a + b) + (\overline{a + b}) = ab + ba$，所以 $ab = \overline{ba}$；但 $\overline{ba} = ba$，故 $ab = ba$。

14. 对于 $\cap$ 和 $\cup$ 的交换律可由对于 $a + b$ 和 ab 的交换律得到。

对于结合律我们仅需考虑∪：

$$(a\cup b)\cup c=(a+b+ab)+c+(a+b+ab)c$$
$$=a+(b+c+bc)+a(b+c+bc)$$
$$=a\cup(b\cup c).$$

对于吸收律我们有

$$a\cap(a\cup b)=a(a+b+ab)$$
$$=aa+ab+aab=a+ab+ab=a,$$
$$a\cup(a\cap b)=a+ab+aab=a.$$

对于分配律我们有

$$(a\cap b)\cup(a\cap c)=ab+ac+abac$$
$$=ab+ac+abc$$
$$=a(b+c+bc)$$
$$=a\cap(b\cap c).$$

最后还注意：

$$x\cap 0=x\cdot 0=0, x\cup 1=1+x+1\cdot x=1,$$
$$x\cap x'=x(x+1)=xx+x=x+x=0,$$
$$x\cup x'=x+(x+1)+x(x+1)$$
$$=x+x+1+xx+x=1.$$

15. 所有的必需关系，即

$$a+b=b+a,\quad a+(b+c)=(a+b)+c$$
$$a\cap(b+c)=(a\cap b)+(a\cap c)$$
$$a+0=a,\quad a+a'=1^{*}$$
$$a+a=0$$

都已在§2.67中证明过了。

16. 在第一个格中

$$a\cup(b\cap c)=a\cup 0=a$$
$$(a\cup b)\cap(a\cup c)=b\cap 1=b.$$

在第二个中

* 此式是多余的，因为布尔环的定义并不要求这个关系式成立。——译者注

$$a \cup (b \cap c) = a \cup c = b$$

$$(a \cup b) \cap (a \cup c) = b \cap b = b,$$ 等等.

除了五个元素的链以外，第二、三两个格在含有五个元素的格中是仅有的分配格.

参 考 书 目

Birkhoff, G., *Lattice Theory*, 2nd ed. New York, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXV, 1948.

Dilworth, R. P. (Editor), *Lattice Theory*, New York, American Mathematical Society, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. II, 1948.

Hermes, H., *Einführung in die Verbandstheorie*, Berlin, Springer-Verlag, 1955.

Huntington, E. V., Sets of independent postulates for the algebra of logic, *Trans. Amer. Math. Soc.* **5**, 208—309, 1904.

Huntington, E. V., Postulate for the algebra of logic, *Trans. Amer. Math. Soc.* **35**, 274—304, 1933.

Newman, M. H. A., A characterization of Boolean lattices and rings, *J. London Math. Soc.* **16**, 256—72, 1941.

Rudeanu, S., Boolean equations and their applications to the study of bridge-circuits, 1. *Bull. Math.* **3**, 51, No. 4, Bucharest, 1959.

Stoll, R. R., *Sets, Logic and Axiomatic Theories*, San Francisco and London. W. H. Freeman, 1961.

Stone, M. H., Subsumption of Boolean algebras under the theory of rings, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **21**, 103—5, 1935.

Stone, M. H., The theory of representations for Boolean algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **40**, 37—111, 1936.

Tarski, A., Zur Grundlagung der Booleschen Algebra, *Fundamenta Mathematica* **24**, 177—198, 1935.

索　引

九　画

结合律　Associative law
语句逻辑　Sentence logic
标准形式　Standard forms

十　画

格　Lattice
原子　Atoms
真值表　Truth tables

十一画

理想　Ideal
理想格　Lattice of ideal
推理法则　Inference rules

十二画

链　Chain
斯通　Stone, M. H.
等价关系　Equivalence relation

十二画以上

零　Zero
演绎定理　Deduction theorem
德·摩根　De Morgan